Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 33-35

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__33_1>

CORRESPONDANCE.

M. **d'Ocagne**. — *Sur le centre de courbure des conchoïdes.* — Le théorème général d'où M. Goormaghtigh fait remarquer (*N. A.*, 1917, p. 434) que l'on peut déduire la construction du centre de courbure de la conchoïde de Nicomède, qui fait l'objet de la question **2254**, est précisément celui d'où je l'ai tirée. Ce théorème général se trouve démontré à la page 286 de mon *Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale* (Gauthier-Villars; 1896).

M. V. **Thébault**. — *Au sujet de la question* **2324**. — Cette propriété n'est qu'une forme particulière de la suivante, très répandue dans les recueils élémentaires :

Si, dans un triangle ABC, *l'angle* A *est égal à* 120°, *l'inverse de la bissectrice intérieure relative à cet angle est égal à la somme des inverses des côtés qui le comprennent.*

Voir par exemple le *Bulletin de Mathématiques élémentaires*, 1901 p. 77.

M. V. **Thébault**. — *Sur une proposition de Laguerre.* — Voici une autre démonstration, pour le *cas du triangle*, de la proposition de Laguerre envisagée par M. R. Bouvaist, (*N. A.* 1917, p. 315).

1. Soient une conique et un cercle représentés par les équations

$$S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$S' \equiv (x - \alpha)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0.$$

Leurs invariants sont

$$\Delta = -\frac{1}{a^2 b^2}, \qquad \theta = \frac{1}{a^2 b^2}(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 - R^2),$$

$$\theta' = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 - R^2\left(\frac{a^2}{1} + \frac{1}{b^2}\right), \qquad \Delta' = -R^2.$$

La condition pour qu'il soit possible de circonscrire à la conique un triangle ABC qui soit en même temps inscrit dans le cercle, s'écrit

$$(1) \qquad \theta^2 = 4\Delta\theta'.$$

2. Soient F et F′ les deux foyers de la conique S, F″ l'inverse de F par rapport au cercle S′ et O le centre de ce cercle; désignons par u et v les longueurs OF et OF′, on a

$$u^2 = (\alpha - c)^2 + \beta^2, \qquad v^2 = (\alpha + c)^2 + \beta^2,$$

d'où

$$\frac{u^2 + v^2}{2} = \alpha^2 + \beta^2 + c^2, \qquad u^2 v^2 = \frac{(u^2 + v^2)^2}{4} - 4\alpha^2 c^2;$$

et

$$\alpha^2 = \frac{(u^2 - v^2)^2}{4c^2}, \qquad \beta^2 = \frac{-(u^2 - v^2)^2 - 2c^2(u^2 + v^2) + 4c^4}{4c^2}.$$

En substituant ces dernières valeurs dans l'égalité (1) on obtient la relation de Laguerre

$$(2) \qquad (R^2 - u^2)(R^2 - v^2) = 4b^2 R^2.$$

3. Cette relation (2) peut être transformée et donner

(¹) Cf. *Nouvelles Annales*, 1903, 214.

d'abord

$$\frac{\overline{\mathrm{F'F''}}^2 \times \mathrm{OF}}{\mathrm{OF''}} = 4a^2 \qquad \text{(Laguerre)},$$

puis

$$\mathrm{F'R} \times \mathrm{F'F''} = 4a^2 \qquad \text{(Laguerre)}.$$