NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. ALEZAIS

Sur le système de *n* équations du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 323-342

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__323_0>

[A2b]

SUR LE SYSTÈME DE n ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

$$
(1)\quad \left\{
\begin{array}{l}
x_1(x_2+x_3+\ldots+x_n) + 1.2(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2 = 3^2a^2,\\
x_2(x_1+x_3+\ldots+x_n) + 2.3(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2 = 5^2a^2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_n(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}) + n(n+1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2 = (2n+1)^2a^2;
\end{array}
\right.
$$

PAR M. R. ALEZAIS.

Ce système a fait partie de la composition de Mathématiques au Concours général de 1880 et il est proposé comme exercice dans plusieurs algèbres élémentaires. M. Moret-Blanc l'a résolu dans ce Recueil (1882, p. 266), mais ses conclusions sont inexactes. Il n'est pas vrai, ainsi qu'il le suppose, que, pour une valeur de n, chaque inconnue ne puisse prendre que deux valeurs égales et de signes contraires et que les 2^n solutions du système (on lit dans le texte n^2) s'obtiennent en combinant les signes de toutes manières.

On voit immédiatement que les solutions du système (1) sont opposées deux à deux; mais il en existe en général qui sont infinies ou imaginaires. J'appellerai *système suffisant de solutions* un système formé de la moitié des solutions réelles et finies et ne contenant pas de solutions opposées.

Si le système (1) se réduit à une équation unique, c'est

$$2x_1^2 = 9a^2,$$

d'où

$$x_1 = \pm\frac{3a}{\sqrt{2}}.$$

S'il est du second ordre, on a

$$\begin{cases} x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2)^2 = 9a^2, \\ x_1 x_2 + 6(x_1 + x_2)^2 = 25a^2. \end{cases}$$

On en déduit

$$(x_1 + x_2)^2 = 4a^2, \qquad x_1 x_2 = a^2,$$

et l'on obtient les deux solutions doubles

$$x_1 = x_2 = a, \qquad x_1 = x_2 = -a.$$

Soit désormais $n > 2$ et posons, comme a fait M. Moret-Blanc,

$$(2) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y.$$

Les équations (1) deviennent, avec $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$x_i^2 - y x_i - i(i+1)y^2 + (2i+1)^2 a^2 = 0,$$

et l'on en tire

$$(3) \qquad 2x_i = y + \varepsilon_i (2i+1)\sqrt{y^2 - 4a^2},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sont des signes indépendants les uns des autres. En portant les valeurs (3) dans la relation (2) et en posant

$$(4) \qquad m = 3\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 + \ldots + (2n+1)\varepsilon_n,$$

on a

$$(n-2)y + m\sqrt{y^2 - 4a^2} = 0, \qquad [m^2 - (n-2)^2]y^2 = 4m^2a^2.$$

Le radical étant supposé positif ainsi que a, on voit que y et m sont de signes contraires; on doit donc écrire

$$y = \frac{-2ma}{\sqrt{m^2 - (n-2)^2}}, \qquad \sqrt{y^2 - 4a^2} = \frac{2(n-2)a}{\sqrt{m^2 - (n-2)^2}};$$

et l'on a

$$(5) \quad x_i = \frac{[-m + \varepsilon_i(2i+1)(n-2)]a}{\sqrt{m^2-(n-2)^2}} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Quel que soit i, ces valeurs sont infinies avec

$$m^2-(n-2)^2=0$$

et elles sont purement imaginaires avec

$$m^2-(n-2)^2<0.$$

On passe d'une solution à la solution opposée en changeant les signes de tous les ε, ce qui change aussi le signe de m.

Les 2^n solutions correspondent aux 2^n systèmes de valeurs des ε. On est donc amené à former tous les arrangements n à n des deux nombres 1 et -1. On peut écrire successivement ceux qui contiennent de toutes manières 0, puis 1, puis 2, ..., puis n nombres -1, mais ceux qui en ont p et $n-p$ correspondent à des solutions opposées; on voit donc que pour obtenir un système suffisant de solutions, si $n=2n'+1$, cas où le développement

$$2^n = 1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\ldots+n+1$$

a $2(n'+1)$ termes, il suffit de prendre les arrangements qui contiennent $0, 1, \ldots, n'$ nombres -1; si $n=2n'$, le même développement ayant $2n'+1$ termes, aux arrangements qui contiennent $0, 1, \ldots, n'-1$ nombres -1, il faut ajouter la moitié de ceux qui en ont n'. Comme, d'une manière générale, on a

$$C_{2n'-1}^{n'} = \frac{1}{2}C_{2n'}^{n'},$$

on peut ajouter ceux qui contiennent n' nombres -1

parmi les $n-1$ premiers nombres et qui ont 1 pour $n^{\text{ième}}$ nombre. C'est ainsi que j'ai procédé pour former le Tableau que l'on trouvera un peu plus loin. Chaque arrangement qui y figure correspond à une solution, si grand que soit n, pourvu que l'on suppose ajoutés à droite un nombre suffisant de nombres 1. J'ai placé tous les arrangements qui concernent un ordre déterminé avant ceux qui concernent aussi l'ordre suivant.

Pour un arrangement donné, il reste à calculer les valeurs correspondantes de m et du radical.

Quand tous les ε sont positifs, on a

$$m = n(n+2),$$

et comme

$$2i+1 = 3+2(i-1),$$

on a en général

$$m = n(n+2) - 6\lambda - 4\mu, \tag{6}$$

en désignant par λ le nombre des ε négatifs et par μ la somme de leurs indices diminués chacun d'une unité. J'appellerai *indices réduits* les indices diminués d'une unité et je considérerai les nombres $0, 1, \ldots, n-1$ comme les numéros d'ordre des rangs $1, 2, \ldots, n$. Ces indices réduits ou numéros d'ordre étant inscrits en tête du Tableau des arrangements, la valeur de m s'obtient pour chacun d'eux, d'après la formule (6), par un calcul facile, et la valeur du radical s'en déduit sans peine. Il sera néanmoins plus avantageux de procéder de la manière suivante. Posons

$$|m| - (n-2) = 2\mathrm{H}.$$

H est un entier; car, d'après (6), m est de même parité que n, et nous pourrons représenter la quantité sans radical par 4Δ avec

$$\Delta = \mathrm{H}(\mathrm{H} + n - 2). \tag{7}$$

En réduisant a à l'unité, la formule (5) devient ainsi :

Avec $m > 0$

$$x_i = \frac{-2\mathrm{H} - (n-2) + \varepsilon_i(2i+1)(n-2)}{2\sqrt{\Delta}},$$

avec $m < 0$

$$x_i = \frac{2\mathrm{H} + n - 2 + \varepsilon_i(2i+1)(n-2)}{2\sqrt{\Delta}}.$$

On voit enfin que, si l'on pose

$$x'_i = \frac{(n-2)i - \mathrm{H}}{\sqrt{\Delta}}, \qquad x''_i = -\frac{(n-2)(i+1) + \mathrm{H}}{\sqrt{\Delta}}, \tag{8}$$

on a

$$\text{avec } m > 0 \left\{ \begin{array}{lll} x_i = x'_i & \text{si} & \varepsilon_i = 1, \\ x_i = x''_i & \text{si} & \varepsilon_i = -1; \end{array} \right.$$

$$\text{avec } m < 0 \left\{ \begin{array}{lll} x_i = -x''_i & \text{si} & \varepsilon_i = 1, \\ x_i = -x'_i & \text{si} & \varepsilon_i = -1. \end{array} \right.$$

Les valeurs x'_i d'une part et les valeurs x''_i d'autre part sont n termes consécutifs d'une même progression arithmétique; mais il n'existe que deux solutions, opposées l'une à l'autre, pour lesquelles les valeurs des n inconnues appartiennent à la même série.

m ne figure plus explicitement, mais il faut tenir compte de son signe; dans le Tableau suivant, je n'ai inscrit que les valeurs de H et de Δ, mais ces valeurs sont en *chiffres gras* quand m est négatif.

	0.	1.	2.	3.	4.	5.	$n=3$. H.	$n=3$. Δ.	$n=4$. H.	$n=4$. Δ.	$n=5$. H.	$n=5$. Δ.	$n=6$. H.	$n=6$. Δ.
	1						7	$2^3.7$	11	11.13	16	$2^4.19$	22	2^2 11.[illegible]
	−1	1					4	$2^2.5$	8	$2^4.5$	13	$2^4.13$	19	19.23
$n>2$	1	−1	1				2	2.3	6	$2^4.3$	11	2.7.11	17	3.7.17
	1	1	−1				0	0	4	$2^3.3$	9	$2^2.3^3$	15	3.5.19
$n>3$	1	1	1	−1					2	2^3	7	2.5.7	13	13.17
	−1	−1	1	1					3	3.5	8	$2^3.11$	14	$2^2.3^2.7$
	−1	1	−1	1					1	3	6	2.3^3	12	$2^6.3$
	1	−1	−1	1					−1	−1	4	$2^2.7$	10	$2^2.5.7$
$n>4$	1	1	1	1	−1						5	$2^3.5$	11	3.5.11
	−1	1	1	−1	1						4	$2^2.7$	10	$2^2.5.7$
	−1	1	1	1	−1						2	2.5	8	$2^5.3$
	1	−1	1	−1	1						2	2.5	8	$2^5.3$
	1	−1	1	1	−1						0	0	6	$2^2.3.5$
	1	1	−1	−1	1						0	0	6	$2^2.3.5$
	1	1	−1	1	−1						−1	−2	4	2^5
	1	1	1	−1	−1						1	2^2	2	$2^2.3$
$n>5$	1	1	1	1	1	−1							9	$3^2.13$
	−1	1	1	1	1	−1							6	$2^2.3.5$
	1	−1	1	1	1	−1							4	2^5
	1	1	−1	1	1	−1							2	$2^2.3$
	1	1	1	−1	1	−1							0	0
	1	1	1	1	−1	−1							−2	-2^2
	−1	−1	−1	1	1	1							7	7.11
	−1	−1	1	−1	1	1							5	$3^2.5$
	−1	−1	1	1	−1	1							3	3.7
	−1	1	−1	−1	1	1							3	3.7
	−1	1	−1	1	−1	1							1	5
	−1	1	1	−1	−1	1							−1	−3
	1	−1	−1	−1	1	1							1	5
	1	−1	−1	1	−1	1							−1	−3
	1	−1	1	−1	−1	1							−1	−3
	1	1	−1	−1	−1	1							1	5
	...	...	...	...	...	...							...	....

En comptant le nombre des valeurs nulles ou négatives de H, on voit que les systèmes d'ordre 3, 4, 5, 6 ont respectivement 2, 0, 4, 2 solutions infinies et 0, 2, 2, 8 solutions imaginaires. Par suite, les systèmes suffisants de ces quatre ordres contiennent respectivement 3, 7, 13, 27 solutions dont les valeurs se déduisent de suite des formules (8).

Voici ces solutions pour les ordres 3 et 4. Au lieu de supposer a réduit à l'unité, je lui donne pour valeur celle du plus petit dénominateur commun des expressions des x relatives à $a = 1$; les valeurs des x deviennent ainsi égales aux numérateurs correspondants :

$n = 3.$

x_1.	x_2.	x_3.	a.
6	5	4	$2\sqrt{14}$
6	2	1	$2\sqrt{5}$
1	5	-1	$\sqrt{6}$

$n = 4.$

x_1.	x_2.	x_3.	x_4.	a.
9	7	5	3	$\sqrt{143}$
6	2	1	0	$2\sqrt{5}$
2	6	0	-1	$2\sqrt{3}$
1	0	6	-2	$\sqrt{6}$
0	1	2	-6	$\sqrt{2}$
-7	-9	3	5	$\sqrt{15}$
-5	3	-9	7	$\sqrt{3}$

On voit que ces deux systèmes n'admettent aucune solution rationnelle; il en est de même du système d'ordre 6; car, avec $n = 6$, aucune valeur de Δ n'est carré parfait; mais le système d'ordre 5 admet la solution

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 10, \quad x_3 = 13, \quad x_4 = -11, \quad x_5 = -14, \quad a = 2.$$

Il n'a d'ailleurs aucune solution rationnelle que cette solution et son opposée.

Solutions qui dépendent d'un même dénominateur. — S'il est faux que toutes les solutions aient un dénominateur unique, on voit déjà sur le Tableau précédent que cela peut arriver pour plusieurs d'entre elles, et, quand n croît, il est facile de voir que le nombre des dénominateurs distincts devient même relativement petit. En effet, à chaque valeur de H correspond une seule valeur de Δ, et H ne peut prendre que les valeurs entières, o inclus, dont la plus grande est $\frac{n(n+1)}{2}+1$ et la plus petite $-\frac{n-2}{2}$ ou $\frac{n-3}{2}$, suivant que n est pair ou impair; on voit encore, en considérant les plus petits systèmes de valeurs de λ et μ, que H ne prend jamais sa valeur maxima diminuée de 1, de 2, de 4 ou de 6 unités. Le nombre des dénominateurs distincts est donc au plus, suivant la parité de n,

$$\frac{n^2+2n-6}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{n^2+2n-7}{2},$$

nombres qui croissent bien moins rapidement que 2^n. Il y a d'ailleurs, en général, des solutions pour toutes ces valeurs de H. D'après le Tableau précédent, les quatre ordres considérés n'offrent que deux exceptions : $H=0$ avec $n=4$ et $H=3$ avec $n=5$ ne donnent aucune solution.

Proposons-nous de trouver toutes les solutions qui correspondent à une valeur de H.

Si H est donné, m est connu au signe près, car j'ai posé

$$|m| = 2H + n - 2.$$

m est d'ailleurs relié au nombre λ des ε négatifs et à la somme μ de leurs indices réduits par la formule (6). Il en résulte

$$(9)\quad 2\mu = \frac{n(n+1)}{2} - (H-1) - 3\lambda \qquad (\text{avec } m > 0),$$

$$(10)\quad 2\mu = \frac{n(n+3)}{2} + H - 1 - 3\lambda \qquad (\text{avec } m < 0).$$

Ces formules déterminent la parité de λ. C'est d'ailleurs un entier positif inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$. Enfin, pour qu'une valeur de λ convienne, il faut que la valeur correspondante de μ soit supérieure ou égale à la somme des λ indices réduits les plus faibles et inférieure ou égale à la somme des λ indices réduits les plus forts $\Big($ou qui précèdent le plus fort, si $\lambda = \frac{n}{2}$, car nous avons dit que dans ce cas les λ nombres -1 doivent être pris parmi les $n-1$ premiers nombres de l'arrangement$\Big)$. Un nombre fini d'essais permet donc de trouver tous les systèmes de valeurs de λ et μ qui correspondent à une valeur de H.

Pour chacun de ces systèmes, il reste ensuite à déterminer tous les systèmes de valeurs des ε pour lesquels λ des ε sont négatifs et ont μ pour somme de leurs indices réduits. J'appelle *arrangements correspondants* tous ceux pour lesquels λ et μ ont un même système donné de valeurs et il s'agit de dresser le Tableau de ces arrangements.

Un système de valeurs de λ et μ vérifiant les conditions indiquées pour une valeur de n, on peut toujours, d'une manière et d'une seule, trouver un entier λ_1, avec $0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda$, tel que la somme des λ_1 derniers indices réduits $\Big($ou qui précèdent le dernier, si $\lambda = \frac{n}{2}\Big)$, augmentée de celle des $\lambda - \lambda_1 - 1$ premiers indices réduits, soit moindre que μ, mais ne le soit que de la valeur de l'un des indices intermédiaires. En supposant λ_1 ainsi déterminé, j'appelle *arrangement initial* l'unique arrangement correspondant qui commence par $\lambda - \lambda_1 - 1$ nombres -1 et se termine par λ_1 nombres -1 $\left(\text{suivis d'un nombre } 1 \text{ si } \lambda = \frac{n}{2}\right)$.

Soient maintenant d'une manière générale i et k deux numéros d'ordre, avec i inférieur à k d'au moins deux unités, et supposons que dans un arrangement correspondant, sous les numéros d'ordre i, $i+1$, $k-1$, k, se trouvent respectivement -1, 1, 1, -1; on obtient un autre arrangement correspondant en mettant aux mêmes rangs 1, -1, -1, 1, sans modifier les autres nombres, car, par cette opération que j'appellerai une *double transposition*, ni λ ni μ n'est changé.

Si deux arrangements appartiennent à un même ensemble d'arrangements correspondants, on peut passer de l'un à l'autre par une suite de doubles transpositions. En effet, ce sont d'abord deux arrangements des mêmes nombres; on peut donc passer de l'un à l'autre par une série de transpositions; mais, puisque la somme des indices réduits des nombres -1 doit être la même pour les deux, à toute transposition modifiant cette somme d'une unité, on peut en faire correspondre une autre la modifiant d'une unité en sens contraire. Il en résulte que, si l'on part de l'arrangement initial et qu'on effectue la double transposition de toutes les manières possibles dans cet arrangement lui-même et dans tous ceux que l'on en déduit par le même procédé, on obtiendra sans exception tous les arrangements correspondants, mais plusieurs d'entre eux se présenteront plus d'une fois; or, il est facile de ne faire que juste le nombre de doubles transpositions qui les donnent tous chacun une fois.

Des deux nombres — 1 qui sont échangés avec des 1 dans une double transposition, distinguons le *nombre de gauche* et le *nombre de droite*. Ces appellations sont corrélatives. Pour qu'un nombre — 1 puisse être le nombre de gauche d'une double transposition, il faut qu'il ait à sa droite un autre nombre — 1 pouvant lui servir de nombre de droite et *vice versa*. Un nombre de gauche doit d'ailleurs être immédiatement suivi d'un nombre 1 et le nombre de droite correspondant doit être immédiatement précédé d'un nombre 1 distinct du premier. Ces deux nombres 1, compris entre les nombres — 1, peuvent à leur tour comprendre ou ne pas comprendre entre eux d'autres nombres 1 ou — 1.

Ces conditions permettent de voir immédiatement sur un arrangement donné quels sont les nombres — 1 qui peuvent être nombres de droite ou nombres de gauche d'une double transposition. Je dirai, pour abréger, que ce sont respectivement les nombres de droite et les nombres de gauche de l'arrangement. Certains nombres — 1 peuvent appartenir aux deux catégories. Ainsi, soit par exemple

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.
—1	—1	—1	1	—1	—1	1	1	—1	1	1	—1	—1	1	1	—1	1	—1

Dans cet arrangement, les nombres numérotés **2**, **5**, **8**, **12** sont les nombres de gauche et les nombres numérotés **8**, **11**, **15**, **17** sont les nombres de droite.

Comme le nombre sous le n° **12** est le dernier nombre de gauche que l'on rencontre quand on parcourt l'arrangement à partir de la gauche, je dirai que c'est le *nombre de gauche le plus à droite*.

On voit que les doubles transpositions qui peuvent être effectuées dans cet arrangement sont au nombre de 13 et caractérisées par les couples suivants :

(2, 8), (2, 11), (2, 15), (2, 17), (5, 8), (5, 11), (5,15),
(5, 17), (8, 11), (8, 15), (8, 17), (12, 15), (12, 17).

Voici maintenant comment on peut dresser le Tableau d'un ensemble d'arrangements correspondants.

Étant donné un arrangement initial quelconque, on peut de proche en proche en déduire tous les arrangements correspondants sans omission ni répétition en effectuant, à partir de chaque arrangement A, la double transposition qui est déterminée sans ambiguïté par les règles suivantes :

1° Le numéro d'ordre α du nombre de gauche de cette double transposition est celui du nombre de gauche le plus à droite dans A;

2° L'arrangement dans lequel elle doit être effectuée est A lui-même, si A n'est pas immédiatement précédé d'un arrangement dans lequel, 1°, tous les nombres à partir du premier à gauche et jusqu'à celui qui est numéroté α inclusivement sont les mêmes que dans A, et dans lequel, 2°, le nombre numéroté α peut être pris pour nombre de gauche. Si A est immédiatement précédé d'un arrangement vérifiant ces deux conditions, supposons pour la généralité qu'il y ait immédiatement au-dessus de A une suite de pareils arrangements consécutifs, on effectue alors la double transposition dans le dernier que l'on rencontre quand on remonte la série des arrangements à partir de A.

3° On prend pour nombre de droite de la double transposition celui qui, dans l'arrangement où on l'effectue, est le plus près à droite du nombre pris pour nombre de gauche.

Le dernier arrangement est celui où aucune double transposition n'est possible. Il a tous ses nombres -1 consécutifs ou disposés en deux groupes séparés par un seul nombre 1.

Voici une application de ce procédé. J'ai indiqué à côté du Tableau, sous les lettres R, G, R', D, le rang de chaque arrangement dans ce Tableau; le numéro d'ordre du nombre de gauche de la double transposition qui donne l'arrangement suivant; le rang dans le Tableau de l'arrangement où cette double transposition doit s'effectuer; le numéro d'ordre de son nombre de droite.

$n = 11, \quad \lambda = 5, \quad \mu = 18, \quad m = 41, \quad H = 16, \quad \Delta = 20^2.$

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	R.	G.	R'.	D.
−1	−1	−1	1	1	−1	1	1	1	1	−1	1	5	1	10
−1	−1	−1	1	1	1	−1	1	1	−1	1	2	6	2	9
−1	−1	−1	1	1	1	1	−1	1	−1	1	3	2	1	5
−1	−1	1	−1	−1	1	1	1	1	1	−1	4	4	4	10
−1	−1	1	−1	1	−1	1	1	1	−1	1	5	5	5	9
−1	−1	1	−1	1	1	−1	1	−1	1	1	6	3	5	9
−1	−1	1	1	−1	−1	1	1	−1	1	1	7	5	7	8
−1	−1	1	1	−1	1	−1	−1	1	1	1	8	1	4	10
−1	1	−1	−1	−1	1	1	1	1	−1	1	9	4	9	9
−1	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1	1	1	10	5	10	8
−1	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1	1	1	11	3	10	8
−1	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	1	1	12	2	12	7
−1	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	13	0	9	9
1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	−1	1	1	14	4	14	8
1	−1	−1	−1	1	−1	1	−1	1	1	1	15	3	15	7
1	−1	−1	1	−1	−1	−1	1	1	1	1	16			

Tous ces arrangements sont distincts et il n'en manque aucun. En effet, les trois règles suivies ont pour effet immédiat de disposer les arrangements dans un ordre tel que les nombres -1 qui peuvent être déplacés vers la droite, le sont successivement et graduellement en commençant par le plus à droite et sans manquer aucun intermédiaire. Dans chaque arrangement, considérons comme *partie initiale* celle dont le dernier nombre, c'est-à-dire le plus à droite, est déterminé de la manière suivante : pour l'arrangement initial, c'est le nombre de gauche le plus à droite; pour un autre arrangement quelconque A, c'est celui dont le numéro d'ordre est le plus grand des deux entiers $\alpha + 1$ et β, en désignant par α le numéro d'ordre du nombre de gauche de la double transposition qui a fourni A et par β le numéro d'ordre du nombre de gauche le plus à droite dans A. On voit facilement que ces parties initiales sont toutes distinctes, que la marche suivie les a données toutes sans exception et enfin que, dans un ensemble d'arrangements correspondants, à chacune d'elles ne peut correspondre qu'un arrangement unique.

Dans le Tableau précédent, les parties initiales sont en *chiffres gras* (1).

Voici quelques applications de cette méthode.

Solutions infinies et imaginaires. — Les solutions infinies correspondent à $H = 0$ et les solutions imaginaires aux valeurs négatives de H. On peut se servir du procédé précédent pour déterminer leur nombre et en déduire le nombre des solutions de ce que j'ai appelé un *système suffisant.*

Voici les résultats que l'on trouve pour les premières valeurs de n :

	Ordre...	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Nombre	total des solutions........	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
	des solutions infinies...... ..	2	0	4	2	8	10	22	36	68	112	204
	des solutions imaginaires..	0	2	2	8	14	32	64	130	260	526	1036
	des solutions d'un système suffisant.....	3	7	13	27	53	107	213	429	860	1729	3476

On peut remarquer que jusqu'à l'ordre 9 les nombres des solutions d'un système suffisant sont égaux chacun au double du précédent alternativement augmenté ou diminué d'une unité; mais cette règle ne vaut plus à partir de l'ordre 10.

Solutions rationnelles. — Pour qu'une solution soit rationnelle, il faut et il suffit que $\Delta = H(H+n-2)$ soit carré parfait. Dans ce cas, en faisant a égal à la racine carrée de ce nombre et en donnant pour valeurs aux x celles des numérateurs correspondants des x'_i ou x''_i, on obtient les solutions du système (1) en nombres entiers.

Les remarques suivantes ramènent à un nombre fini d'essais la recherche de toutes les solutions entières.

Pour que $H(H+n-2)$ soit carré parfait :

1° Si H est un carré, soit $H = h^2$, il faut que $h^2 + n - 2$ le soit aussi, ce qui exige que $n-2$ soit ou bien un nombre impair plus grand que 1, ou bien un multiple de 4 plus grand que 4, et ce qui, d'ailleurs, ne laisse à h qu'un nombre fini de déterminations.

2° Si H n'est pas carré, il ne peut être que le produit d'un carré par un facteur de $n-2$ inférieur à $n - 2$; car soit $H = h^2 n_1$, n_1 entier non carré, on a

$$H(H + n - 2) = h^2 n_1 (h^2 n_1 + n - 2);$$

si n_1 ne divise pas $n - 2$, il ne divise pas la parenthèse et il n'est qu'une fois en facteur dans l'expression, et si $n_1 = n - 2$, on a

$$H(H + n - 2) = h^2 (n - 2)^2 (h^2 + 1),$$

et le dernier facteur ne peut être un carré. Si $n - 2 = n_1 n_2$, il faut encore que $h^2 + n_2$ puisse être un carré et ici encore h n'a qu'un nombre fini de déterminations.

On peut facilement vérifier par cette méthode que les systèmes d'ordres 3, 4 et 6 n'ont pas de solutions rationnelles. Dans les trois cas, on est amené à faire $H = h^2$; or aucun des nombres

$$h^2(h^2 + 1), \quad h^2(h^2 + 2), \quad h^2(h^2 + 4)$$

ne peut être carré parfait.

On voit au contraire que tous les autres ordres ont des solutions rationnelles. En effet :

1° Si n est impair et supérieur à 3, on a

$$n - 2 = 2n_1 + 1$$

avec n_1 au moins égal à 1 et il suffit de faire $H = n_1^2$ pour que

$$\Delta = n_1^2 (n_1^2 + 2n_1 + 1)$$

soit carré parfait.

2° Si n est pairement pair et supérieur à 4, on a

$$n - 2 = 4n_1 + 2$$

avec n_1 au moins égal à 1 et il suffit de faire $H = 2n_1^2$ pour que

$$\Delta = 2^2 n_1^2 (n_1^2 + 2n_1 + 1)$$

soit carré parfait.

3° Si n est impairement pair et supérieur à 6, on a

$$n - 2 = 4n_1 + 4$$

avec n_1 au moins égal à 1 et il suffit de faire $H = n_1^2$ pour que

$$\Delta = n_1^2 (n_1^2 + 4n_1 + 4)$$

soit carré parfait.

Voici les résultats pour les premières valeurs de n. Ils sont présentés sous forme de solutions entières avec a égal à la racine de Δ ou à un de ses facteurs en cas de réduction, c'est-à-dire quand $n - 2$, H et Δ ont un facteur commun.

Je désigne par N le nombre des solutions rationnelles qui font partie d'un système suffisant. Le nombre total s'obtient en doublant. On peut remarquer que, pour une détermination de H rendant Δ carré, le nombre des solutions croît avec n ; mais le nombre des déterminations de H rendant Δ carré a des fluctuations provenant du nombre et de la nature des diviseurs de $n-2$. Si $n - 2$ est un nombre premier ou le double ou le quadruple d'un nombre premier, H ne peut avoir qu'une seule détermination.

n.	H.	Δ.	a.	x'_i.	x''_i.	m.	ε_1.	ε_2.	ε_3.	ε_4.	ε_5.	ε_6.	ε_7.	ε_8.	ε_9.	ε_{10}.	ε_{11}.	ε_{12}.	ε_{13}.	ε_{14}.	ε_{15}.	ε_{16}.	ε_{17}.			N.
							Arrangements initiaux																			
5.	1	2^2	2	$3i-1$	$-3i-4$	—	1	1	1	—1	—1															1
7.	4	6^2	6	$5i-4$	$-5i-9$	+	—1	1	—1	1	1	1	—1													4
8.	2	4^2	2	$3i-1$	$-3i-4$	+	—1	1	1	1	1	1	—1	—1										5		6
						—	1	1	1	1	1	—1	—1	—1										1		
9.	9	12^2	12	$7i-9$	$-7i-16$	+	—1	1	1	1	1	1	—1	1	—1									7		8
						—	1	1	1	1	—1	1	—1	—1	—1									1		
10.	1	3^2	3	$8i-1$	$-8i-9$	+	1	1	1	1	1	1	—1	1	—1	—1								1		19
						+	—1	—1	1	1	—1	1	1	—1	—1	1								12		
						—	—1	1	1	1	—1	1	—1	—1	—1	1								6		
11.	16	20^2	20	$9i-16$	$-9i-25$	+	1	1	—1	1	1	1	1	1	1	—1	—1							7	23	53
						+	—1	—1	—1	1	1	—1	1	1	1	1	—1							16		
	3	6^2	2	$3i-1$	$-3i-4$	+	—1	1	1	1	1	1	1	—1	1	—1	—1							14	30	
						—	—1	1	1	1	1	—1	1	1	—1	—1	—1							16		
12.	8	12^2	6	$5i-4$	$-5i-9$	+	—1	—1	1	1	1	1	—1	1	1	1	—1	—1						49		54
						—	1	1	1	—1	1	1	1	1	—1	—1	—1	—1						5		
13.	25	30^2	30	$11i-25$	$-11i-36$	+	1	1	1	1	1	1	—1	1	1	1	1	—1	—1					4		69
						+	—1	—1	—1	1	1	1	1	1	1	1	1	—1	—1					63		
						—	1	1	1	1	1	—1	1	1	—1	—1	—1	—1	—1					2		
14.	4	8^2	2	$3i-1$	$-3i-4$	+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	—1	1	—1	—1	—1				1		180
						+	—1	—1	1	1	1	—1	1	1	1	1	1	—1	—1	—1				139		
						—	—1	1	1	1	1	1	—1	1	1	1	—1	—1	—1	—1				40		
15.	36	42^2	42	$13i-36$	$-13i-49$	+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	—1	1	—1	—1			1		187
						+	—1	—1	1	1	1	1	1	—1	1	1	1	1	1	—1	—1			141		
						+	—1	—1	—1	—1	—1	1	1	1	—1	1	1	1	1	1	—1			45		
16.	18	24^2	12	$7i-9$	$-7i-16$	+	—1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	—1	1	1	—1	—1	—1		55		532
						+	1	—1	—1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	—1	—1	1		440		
						—	—1	[illegible]	—1	1	1	1	1	1	[illegible]	1	1	—1	[illegible]	[illegible]	—1	1		37		

		[illegible]	[illegible]		
	+	—1 —1 —1 —1 1 —1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 —1 —1	311	534	
	—	1 1 1 1 1 1 —1 1 1 1 —1 —1 —1 —1 —1 —1 —1	3		
1 4^2 4 15i— 1 —15i—16	+	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 —1 1 —1 —1 —1 —1	1		
	+	—1 —1 1 1 1 1 1 —1 1 1 1 1 1 —1 —1 —1 —1	477	1129	
	—	1 1 1 1 1 1 —1 1 1 1 1 1 —1 —1 —1 —1 —1	7		3833
	—	—1 —1 —1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 —1 —1 —1 —1 —1	644		
12 18^2 6 5i— 4 — 5i— 9	+	—1 1 1 1 —1 1 1 1 1 1 1 1 1 —1 —1 —1 —1	193		
	+	—1 —1 —1 —1 1 1 1 1 —1 1 1 1 1 1 —1 —1 —1	819	1060	
	—	—1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 —1 1 —1 —1 —1 —1 —1	48		
5 10^2 2 3i— 1 — 3i— 4	+	1 1 1 1 1 1 1 1 1 —1 1 1 1 —1 —1 —1 —1	3		
	+	—1 —1 1 1 1 —1 1 1 1 1 1 1 1 —1 —1 —1 —1	560	1110	
	—	1 1 1 1 1 1 1 1 —1 1 1 1 —1 —1 —1 —1 —1	3		
	—	—1 —1 1 1 —1 1 1 1 1 1 1 1 —1 —1 —1 —1 —1	544		
18. 9 15^2 15 16i— 9 —16i—25	+	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 —1 1 —1 —1 —1 —1			
	+	—1 —1 1 1 1 1 1 1 —1 1 1 1 1 1 —1 —1 —1 —1			
	+	—1 —1 —1 —1 —1 1 1 1 1 1 1 1 1 —1 —1 —1 —1 1			
	—	1 —1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 —1 —1 —1 —1 —1 —1			
	—	—1 —1 1 —1 1 1 1 1 1 1 1 —1 —1 —1 —1 —1 —1 1			
2 6^2 3 8i— 1 — 8i— 9	+	1 —1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 —1 —1 —1 —1 —1			
	+	—1 —1 —1 1 1 1 1 1 —1 1 1 1 1 1 —1 —1 —1 —1			
	—	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 —1 1 —1 —1 —1 —1 —1			
	—	—1 —1 1 1 1 1 1 —1 1 1 1 1 1 —1 —1 —1 —1 —1			
19. 64 72^2 72 17i—64 —17i—81	+	—1 1 1 1 1 —1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 —1 —1 —1			
	+	—1 —1 —1 —1 1 1 1 1 1 1 1 1 —1 1 1 1 1 —1 —1			
	+	—1 —1 —1 —1 —1 —1 —1 1 1 1 1 —1 1 1 1 1 1 1 —1			
20. 32 40^2 20 9i—16 — 9i—25	+	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 —1 1 1 1 —1 —1 —1 —1			
	+	—1 —1 1 1 1 1 1 1 —1 1 1 1 1 1 1 1 —1 —1 —1 —1			
	+	—1 —1 —1 —1 —1 1 1 1 1 1 1 1 —1 1 1 1 1 —1 —1 —1			
	—	—1 1 1 1 1 —1 1 1 1 1 1 1 1 —1 —1 —1 —1 —1 —1 —1			

Pour écrire explicitement la solution relative à l'un des arrangements initiaux ou à l'un de ceux qu'on peut en déduire, il suffit d'appliquer les règles données après les formules (8) sur le choix à faire entre x'_i et x''_i suivant le signe de m et suivant celui de ε_i (i indice non réduit). Voici par exemple quelques solutions entières du système d'ordre **17** :

x_1.	x_2.	x_3.	x_4.	x_5.	x_6.	x_7.	x_8.	x_9.
— 79	— 94	— 4	11	26	41	56	71	86
14	29	44	59	74	89	104	119	134
— 14	6	11	16	— 34	26	31	36	41
2	5	8	11	14	17	20	23	26

x_{10}.	x_{11}.	x_{12}.	x_{13}.	x_{14}.	x_{15}.	x_{16}.	x_{17}.	a.
101	116	131	146	—274	176	—304	—319	56
149	164	—196	194	—226	—241	—256	—271	4
46	51	56	61	— 79	— 84	— 89	— 94	6
— 34	32	35	38	— 46	— 49	— 52	— 55	2

Les quatre du système d'ordre 7 sont :

x_1.	x_2.	x_3.	x_4.	x_5.	x_6.	x_7.	a.
—14	6	—24	16	21	26	—44	6
—14	6	11	—29	21	—39	31	6
1	—19	—24	16	21	—39	31	6
1	—19	11	—29	—34	26	31	6