NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Condition de fermeture d'une suite de cercles

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 303-306

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__303_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[F8 fβ]

CONDITION DE FERMETURE D'UNE SUITE DE CERCLES;

PAR M. G. FONTENÉ.

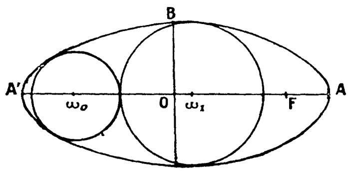
La courbe de la figure étant une ellipse, il existe, entre les cercles (ω) et (ω'), une relation doublement quadratique qui donne lieu au théorème suivant :

1. THÉORÈME. — *Étant donnée une ellipse, on considère une suite de cercles* (ω_0), (ω_1), (ω_2), ... *bitangents à l'ellipse, et ayant leurs centres sur l'axe focal, tels, en outre, que chacun d'eux soit tangent au précédent. Pour que cette suite se ferme*

avec p cercles, quel que soit le cercle (ω_0), *il faut et il suffit qu'on ait*, F *étant un foyer et* B *un sommet du petit axe*,

$$\widehat{\mathrm{OFB}} = \frac{m\pi}{p} \qquad \left(\frac{m}{p} \text{ irréductible}\right).$$

Si p est pair, $p = 2q$, *le cercle* (ω_i) *et le cercle* (ω_{i+q}) *sont symétriques par rapport au centre de*



l'ellipse. (La figure est faite pour $p = 6$, $m = 1$.)

Si l'on désigne par α l'abscisse du centre de l'un des cercles, par ρ son rayon, on a d'abord

$$\frac{\alpha^2}{c^2} + \frac{\rho^2}{b^2} = 1,$$

et l'on peut poser

$$\alpha = c\cos\varphi, \qquad \rho = b\sin\varphi.$$

Si α', ρ' se rapportent à un cercle analogue, tangent au précédent, on aura (*en choisissant l'un des deux cercles possibles*)

$$\alpha' - \alpha = \rho' + \rho$$

ou

$$c(\cos\varphi' - \cos\varphi) = b(\sin\varphi' + \sin\varphi),$$

ou

$$\tan\mathrm{g}\frac{\varphi' - \varphi}{2} = \frac{-b}{c} = -\tan\mathrm{g}\frac{\omega}{2},$$

ou enfin

$$(\alpha) \qquad \varphi' = \varphi - \omega.$$

On en déduit immédiatement

$$(1) \qquad \frac{\alpha_n}{c} = \cos(\varphi - n\omega),$$

$$(2) \qquad \frac{\rho_n}{b} = \sin(\varphi - n\omega),$$

avec

$$\tan\frac{\omega}{2} = \frac{b}{c},$$

$$\omega = 2\widehat{\mathrm{OFB}} = \widehat{\mathrm{BFB'}}.$$

Le cercle d'indice p se confondra avec le cercle d'indice zéro si l'on a

$$p\omega = 2m\pi,$$

$$\widehat{\mathrm{OFB}} = \frac{\omega}{2} = \frac{m\pi}{p},$$

comme on l'a annoncé.

Si p est pair, $p = 2q$, on aura, m étant impair,

$$\frac{\alpha_q}{c} = \cos(\varphi - q\omega) = \cos(\varphi - m\pi) = -\cos\varphi = -\frac{\alpha_0}{c},$$

où $\alpha_q = -\alpha_0$: le cercle (ω_i) et le cercle (ω_{i+q}) seront alors symétriques par rapport au centre de l'ellipse.

[En faisant varier le système des p cercles, il arrive un moment où le cercle α_0 a son centre en O ; on a alors, avec $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$\alpha_n = c\sin n\omega, \qquad \rho_n = b\cos n\omega.$$

Plaçons-nous dans le cas où p est pair, $p = 2q$. Si p est doublement pair, $q = 2r$, $p = 4r$, le cercle d'indice r est un cercle de rayon nul ayant son centre au foyer F, et le cercle d'indice $r + h$ se confond avec le cercle d'indice $r - h$. Si p est simplement pair,

$$q = 2s + 1, \qquad p = 2(2s + 1),$$

le cercle d'indice s est le cercle osculateur en A, le cercle d'indice $s+1$ se confond avec lui, et le cercle d'indice $s+1+h$ se confond avec le cercle d'indice $s-h$.]

Si l'on remplace l'axe focal par l'axe non focal, ou si l'on considère une hyperbole, les fonctions circulaires sont remplacées par des fonctions hyperboliques dont la période est imaginaire, et la fermeture du système n'est plus possible; l'énoncé ci-dessus le montre d'ailleurs.

2. *Si l'on développe les formules* (1) *et* (2), *on voit que* α_n *et* ρ_n *ne s'expriment pas en fonction algébrique de* n; *mais cela se produit par la parabole, qui offre un cas de dégénérescence des formules.*

La relation entre les rayons de deux cercles consécutifs est alors

$$\rho' - \rho = 2p;$$

mise sous la forme $\rho' - p = \rho + p$, cette relation exprime que le point de contact des deux cercles est équidistant des cordes de contact de ces cercles avec la parabole. On peut regarder cette relation comme résultant de la décomposition d'une relation doublement quadratique

$$(\rho' - \rho)^2 = 4p^2.$$

Les rayons des cercles (ω) sont alors en progression arithmétique; on a les formules

$$\rho_n - \rho_0 = 2p.n,$$

$$\alpha_n - \alpha_0 = \frac{1}{2p}(\rho_n^2 - \rho_0^2) = 2n(\rho_0 + pn).$$