J. LEMAIRE

Démonstration géométrique d'une propriété des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 299-303

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__299_1>

[$L^1 6b$]

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE PROPRIÉTÉ DES CONIQUES;

PAR M. J. LEMAIRE.

Il s'agit du théorème suivant :

M *désignant un point d'une conique* (E), ω *le centre de courbure en ce point, si une conique* (Σ) *passe aux foyers réels de* (E) *et a en* M, *avec* (E), *trois points communs confondus*, ω *est le pôle de* FF′ *par rapport à* (Σ).

Considérons d'abord une conique quelconque (S) passant en F, F′, et touchant (E) en M; les traces N et T de la normale et de la tangente en M sur l'axe focal de (E) étant conjuguées harmoniques par rapport aux foyers, MN est la polaire de T par rapport à (S), et le pôle P de FF′ est sur cette normale. On sait que si trois coniques ont deux points communs, les trois sécantes communes joignant deux à deux leurs autres points communs concourent; si donc Δ est la sécante commune à (S) et à (E) qui ne passe pas en M, cette droite coupe FF′ en un point fixe T′, quand (S) varie, M restant fixe; en considérant la conique particulière (S′) bitangente à (E), on voit que T′ est symétrique de T par rapport au centre O de (E).

Il suit de là que P et le point Q, où Δ coupe la normale MN, forment sur cette droite deux divisions homographiques, quand (S) varie, et la proposition sera établie si nous prouvons que ω et M *sont deux points homologues* de ces divisions.

Les coniques (S) réduites aux systèmes de droites MF et MF′, MT et FF′, donnent les points homologues M et D et le point double N, en appelant D le point commun à MN et à $\varphi\varphi'$, φ et φ' étant les seconds points où MF et MF′ coupent (E). La conique (S′), tangente à (E) au point M′ diamétralement opposé à M, donne le point à l'infini sur la normale et le point E où T′M′ coupe cette droite, de sorte que finalement tout revient à prouver que

$$(\omega MN\infty) = (MDNE)$$

ou

$$(\infty MN\omega) = (EDNM). \tag{1}$$

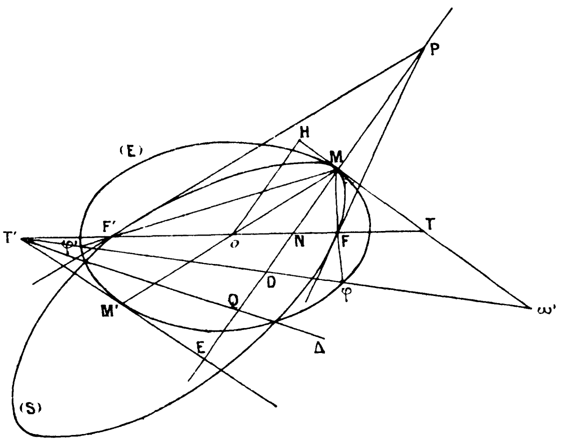
Soit ω' le point où $T'\varphi'\varphi$ coupe MT; d'après le théorème de Frégier généralisé, si deux cordes $M\varphi$, $M\varphi'$ d'une conique ont des directions symétriques par rapport à la normale en M, $\varphi\varphi'$ pivote autour du pôle de la normale : ω' est donc le pôle de MN par rapport à (E), c'est-à-dire le centre de courbure en M de la conique homofocale à (E) et passant en ce point. Considérant le faisceau (T′, EDNM), nous voyons que

$$(\mathrm{EDNM}) = (\infty\omega'\mathrm{TM})$$

et la relation (1) peut être remplacée par

$$(\infty\mathrm{MN}\omega) = (\infty\omega'\mathrm{TM});$$

cette dernière relation se déduit sans peine de la construction bien connue, due à Mannheim, des points ω et ω'; elle est aussi une conséquence du fait que ω et ω' sont les points où la normale et la tangente sont



touchées par la parabole tangente a ces droites et aux axes de la conique (E).

Autrement : quand (S) varie, le pôle P de FF′ et le centre de courbure C de cette conique en M forment sur la normale deux divisions homographiques, dont il suffit de montrer que ω est un point double. Considérant les mêmes coniques particulières que plus haut, nous avons en M un point double, en N et le point à l'infini sur la normale deux points homologues; de plus, P étant à l'infini pour la conique (S′), le point homologue est le centre de courbure μ de (S') en M, de sorte qu'il s'agit d'établir que

$$(MN\infty\omega) = (M\infty\mu\omega),$$

ou

$$\frac{\omega N}{\omega M} = \frac{\mu M}{\omega M},$$

ou

$$\omega N = \mu M,$$

ou

$$\omega M - NM = \mu M;$$

α et β désignant les demi-axes de (S'), a et b ceux de la conique (E), nous avons

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2,$$

car le cercle de Monge de (S') est le cercle principal de (E); si θ est l'angle de OM avec la direction conjuguée, qui est la même pour (E) et pour (S'), on sait que

$$\omega M = \frac{a'^2}{OM . \sin\theta},$$

$$\mu M = \frac{\alpha'^2}{OM . \sin\theta},$$

a' et α' demi-diamètres conjugués de OM dans les deux coniques, et la relation à établir s'écrit

$$(2) \qquad \frac{a'^2 - \alpha'^2}{OM . \sin\theta} = MN;$$

mais

$$a'^2 + \overline{OM}^2 = a^2 + b^2,$$

et

$$\alpha'^2 + \overline{OM}^2 = a^2,$$

d'où

$$a'^2 - \alpha'^2 = b^2,$$

et la relation (2) peut se mettre finalement sous la forme

$$b^2 = \mathrm{OH}.\mathrm{MN},$$

OH étant la distance du centre O à la tangente, et cette égalité exprime un théorème bien connu.

La propriété que nous venons de démontrer est vraie aussi, en vertu du principe de continuité, pour une conique (Σ') passant aux foyers imaginaires de (E) et ayant en M, avec (E), trois points communs confondus.

On en déduit la suivante : *Si du centre de courbure* ω *d'une conique en un point* M *on lui mène des tangentes, les points de contact, réels ou imaginaires, sont deux foyers d'une conique passant en* M *et ayant en ce point même cercle osculateur que la conique donnée.*