

V. THÉBAULT

**Deux théorèmes de MM. Lemoyne et
Fontené sur l'orthopole**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 18
(1918), p. 293-299

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__293_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[K'2e]

DEUX THÉORÈMES DE MM. LEMOYNE ET FONTENÉ
SUR L'ORTHOPOLE ;

PAR M. V. THÉBAULT.

Nous nous proposons de donner une solution élémentaire du théorème fondamental de M. T. Lemoyne sur l'orthopôle d'une droite Δ par rapport à un triangle ABC (¹) et de généraliser celui de M. Fontené (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1906, p. 56).

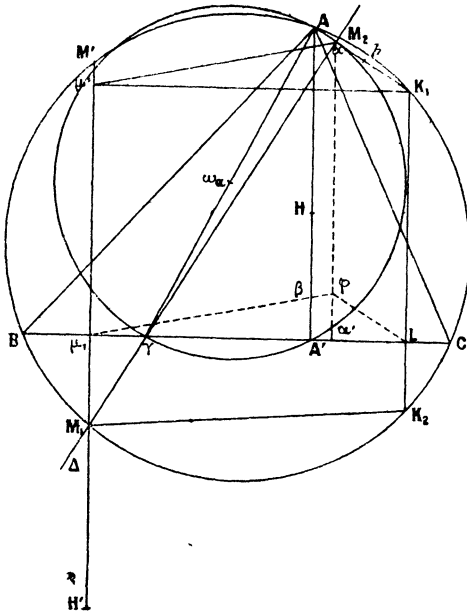
1. M. T. Lemoyne (*Nouvelles Annales*, 1904, p. 400) énonce sans démonstration le théorème suivant :

Les axes radicaux des cercles podaires de chacun des points d'une transversale Δ , par rapport à un triangle ABC, passent par un point fixe φ ; ce qui revient à dire que φ a même puissance par rapport à tous ces cercles. Lorsque Δ coupe le cercle ABC, en deux points M_1, M_2 , les droites de Simson de M_1 et M_2 se rencontrent au point φ .

Nous avons démontré en la généralisant la deuxième partie de cette proposition (*Bulletin de Mathéma-*

(¹) Une élégante démonstration de ce théorème, la seule qui, croyons-nous, soit parue aux *Nouvelles Annales*, a été donnée par M. R. Bouvaist (1915, p. 358). — Voir aussi une démonstration analytique de M. Neuberger : *Sur les cercles podaires relatifs à un triangle fixe* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1910).

tiques élémentaires, 1910, p. 261, et *Nouvelles Annales*, 1915, p. 221). Considérant le cas où Δ est un diamètre du cercle circonscrit O au triangle ABC , nous avons remarqué que par l'orthopôle φ de Δ passe



une troisième droite de Simson relative au triangle ABC , celle du point K symétrique de l'orthocentre H de ABC par rapport à φ .

Cette droite est du reste l'axe de la parabole de foyer φ et de directrice Δ . On arrive à ce résultat en montrant que la droite de Simson du point K' , diamétralement opposé au point K sur le cercle O , est parallèle à Δ .

Plus généralement, Δ étant une sécante quelconque qui rencontre le cercle O en M_1 et M_2 , la perpendi-

culaire de A sur Δ coupe O en K_1 , la perpendiculaire K_1K_2 à BC rencontre O en K_2 . La droite de Simson de K_2 , par rapport à ABC, passe au point de concours des droites de Simson de M_1 et M_2 , c'est-à-dire à l'orthopôle φ de Δ .

Soient L le pied de la perpendiculaire K_1K_2 sur BC, α la projection de A sur Δ , φ l'intersection de la parallèle $L\varphi$ à $A\alpha$ avec la perpendiculaire $\alpha\alpha'$ à BC (voir la figure).

$L\varphi$ est la droite de Simson de K_2 par rapport à ABC.

Traçons la perpendiculaire $M_1\mu_1\mu'_1$ à BC, μ'_1 étant sur la parallèle $K_1\mu'_1$ à BC;

$$\alpha\varphi = K_1L = \mu_1\mu'_1,$$

et $\mu_1\varphi$ est égal et parallèle à $\mu'_1\alpha$,

Les quatre points M_1 , μ'_1 , α , K_1 étant concycliques, $\mu'_1\alpha$ et M_1A sont antiparallèles à M_1K_1 par rapport à $M_1\mu'_1$ et AK_1 , et par suite parallèles entre elles.

Si H' est l'orthocentre du triangle BM_1C , on a facilement

$$\mu_1H' = \mu_1M', \quad M_1H' = AH;$$

d'où

$$\mu_1M_1 = \mu_1H' - M_1H' = \mu_1M' - AH = H\beta,$$

et $M_1\mu_1H\beta$ étant un parallélogramme, $\mu_1\varphi$ est la droite de Simson de M_1 par rapport à ABC.

De même $\mu_2\varphi$ est la droite de Simson de K_2 par rapport à ABC.

Par suite, φ point de la droite de Simson de M_2 est aussi l'intersection des droites de Simson de M_1 et M_2 , c'est-à-dire l'orthopôle de Δ .

2. Désignons par δ_1 , δ_2 , δ_3 les angles de $L\varphi$ respectivement avec AB, BC, CA.

Le parallélisme de AK_1 et $L\varphi$ donne

$$(K_1A, AB) = (\varphi L, AB) = \delta_1;$$

de même

$$\widehat{K_1BC} = \widehat{K_1AC} = (\varphi L, AC) = \delta_3.$$

Or

$$(1) \quad \varphi\alpha = K_1L = \frac{K_1B \times K_1C}{2R} = 2R \sin \delta_1 \sin \delta_3.$$

Le cercle ω_a de diamètre $A\gamma$ passe en α et A' , pied de la hauteur AA' de ABC ; soit α' l'intersection de ω_a et de $\alpha\varphi$. Ce cercle ω_a ayant son centre sur la droite des milieux de AB et AC , le quadrilatère $AA'\alpha'\alpha$ est un trapèze isocèle.

Alors on obtient sans difficulté

$$(2) \quad \varphi\alpha' = (AK_1 - 2A\alpha) \sin \delta_2 = 2d \sin \delta_2,$$

d étant la distance du centre O à la droite Δ , car h étant l'orthocentre du triangle $K_1M_1M_2$, c'est-à-dire le symétrique de A par rapport à Δ ,

$$2d = hK_1 = AK_1 - 2A\alpha.$$

Appelons d' la distance de φ à Δ ,

$$d' = \varphi\alpha \sin \delta_2 = 2R \sin \delta_1 \sin \delta_3 \sin \delta_2.$$

Cette valeur remarquable donne aussitôt la formule

$$d' = 2R \cos \Delta_1 \cos \Delta_2 \cos \Delta_3$$

donnée par M. J. Neuberg : *Sur les cercles podaires relatifs à un triangle fixe* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1910, p. 5). $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sont les angles de Δ avec AB, BC, CA , angles complémentaires de $\delta_1, \delta_2, \delta_3$.

Enfin les relations (1) et (2) donnent l'expression

de la puissance de φ dans le cercle ω_a :

$$\varphi\alpha \cdot \varphi\alpha' = 4Rd \sin \delta_1 \sin \delta_2 \sin \delta_3 = 2dd'.$$

La symétrie de ce résultat montre que l'orthopôle φ est le centre radical des trois cercles $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ qui ont pour diamètres respectifs les droites qui joignent les sommets A, B, C aux intersections de Δ avec AB, BC, CA.

3. Soient S un point quelconque de Δ ; DEF le triangle podaire de ce point par rapport à ABC; M l'intersection de SD avec la parallèle AM à BC; α la projection orthogonale de A sur Δ ; AO rencontre Δ en R_a dont les projections sur AB et CA sont U_a, V_a .

Les cercles AMD α et AU α V α , de diamètres respectifs AS et AR α , donnent

$$\widehat{E\alpha F} = \widehat{U_a\alpha V_a} = 180^\circ - \widehat{A},$$

et EF, U α V α sont tangentes à une parabole de foyer α , conique qui, visiblement, est tangente aussi aux côtés AB et CA.

Appelons alors P α l'intersection des tangentes EF et U α V α :

$$\widehat{\alpha EC} = \widehat{\alpha P_\alpha V_\alpha}.$$

Or, dans le quadrilatère inscrit AM α E,

$$\widehat{\alpha EC} = \widehat{\alpha MA};$$

d'où

$$\widehat{\alpha MA} = \widehat{\alpha P_\alpha V_\alpha},$$

et α M passe au point d'intersection P α de EF et U α V α .

Dans le cercle DEF,

$$DP_\alpha \cdot P_\alpha K = EP_\alpha \cdot P_\alpha F.$$

Or, dans le cercle $AE\alpha FM$, de diamètre AS ,

$$MP_{\alpha} \cdot P_{\alpha}\alpha = EP_{\alpha} \cdot P_{\alpha}F = DP_{\alpha} \cdot P_{\alpha}K.$$

Le quadrilatère $MD\alpha K$ est alors inscriptible; le centre du cercle est situé sur la perpendiculaire à MD en son milieu, c'est-à-dire sur la droite B_1C_1 des milieux de BC et CA .

Soit α' le symétrique de α par rapport à B_1C_1 . Le cercle de diamètre AQ , Q étant l'intersection de BC et Δ , contient α et α' . De plus, α' est un point du cercle $MD\alpha K$.

Donc

$$D\varphi \cdot \varphi K = \alpha\varphi \cdot \varphi\alpha' = 2dd' = \text{const.}$$

et le théorème fondamental de M. Lemoine sur l'orthopôle est établi.

4. A propos de deux théorèmes de M. Fontené, nous avons donné dans les *Nouvelles Annales* (1916, p. 498) une démonstration simple de la construction de l'orthopôle d'un diamètre OS du cercle circonscrit O par rapport à un triangle ABC .

La précédente figure va nous permettre d'étendre cette détermination de l'orthopôle φ au cas le plus général d'une droite *quelconque* Δ du plan du triangle ABC .

Considérons alors les groupes de cercles ω_1 et ω_2 , ω_1 et ω_3 , ω_2 et ω_3 , respectivement circonscrits aux triangles DEF , AFE et $MD\alpha K\alpha'$.

Leurs axes radicaux, qui sont respectivement EF , $D\varphi$, αM , se coupent en un même point, intersection de EF et αM , c'est-à-dire P_{α} .

D'où ce théorème général :

On donne un triangle ABC et une droite Δ quel-

conque de son plan. Les rayons AO , BO , CO du cercle circonscrit au triangle rencontrent Δ en trois points R_a , R_b , R_c , dont les projections orthogonales sur les côtés adjacents sont U_aV_a , U_bV_b , U_cV_c . Soient DEF le triangle podaire d'un point S de Δ par rapport à ABC ; P_a , P_b , P_c , les intersections respectives des droites U_aV_a et EF , U_bV_b et FD , U_cV_c et DE . Les trois droites DP_a , EP_b , FP_c concourent en un point φ orthopôle de Δ par rapport au triangle ABC .