NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BOUVAIST

# Sur deux propositions de Ribaucour (Questions 858, 859)

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 18 (1918), p. 25-30

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__25_1>

[O29]

# SUR DEUX PROPOSITIONS DE RIBAUCOUR (QUESTIONS 858, 859);

PAR M. R. BOUVAIST.

Je démontrerai tout d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient deux points* M *et* (M′) *décrivant deux courbes* (M) *et* (M′) *de telle sorte que la droite* MM′ *touche en* T *une courbe* (T), *les tangentes à* (M) *et* (M′) *en* M *et* M′ *se coupent sur une courbe* (K) *en* K, *la tangente à* (K) *en* K *coupe* MM′ *en* S; *si* $\rho_M$ *et* $\rho_{M'}$ *désignent les rayons de courbure en* M *et* M′ *à* (M) *et* (M′) *on a la relation*

$$\frac{\rho_{M'}}{\rho_M} = \frac{MS.M'T}{M'S.MT}\,\frac{\overline{KM'}^3}{\overline{KM}^3},$$

Soient N l'intersection des normales à (M) et (M′) en M et M′, $\mu$ et $\mu'$ les centres de courbure de ces courbes en M et M′, $\alpha$ et $\beta$ les intersections de la normale en K à (K) avec NM, NM'. Posons

$$\widehat{NMM'} = \theta, \qquad \widehat{NM'M} = \theta', \qquad \widehat{MK\alpha} = \varphi, \qquad \widehat{M'K\beta} = \varphi',$$

nous aurons

$$\frac{d(M)}{d(M')} = \frac{MK}{M'K}\,\frac{TM}{TM'}, \qquad d(K) = K\alpha\,\frac{d(M)}{M\mu} = K\beta\,\frac{d(M')}{M'\mu'},$$

d'où

$$\frac{KM}{KM'}\,\frac{TM}{TM'} = \frac{M\mu}{M'\mu'}\,\frac{KM'}{KM}\,\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}, \qquad \frac{\overline{MK}^2}{\overline{M'K}^2}\,\frac{TM}{TM'} = \frac{M\mu}{M'\mu'}\,\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'},$$

d'où, en remarquant que $\frac{MS}{\cos\varphi} = \frac{KS}{\cos\theta}$, $\frac{M'S}{\cos\varphi'} = \frac{KS}{\cos\theta'}$,

$$\frac{MS}{M'S} : \frac{MT}{M'T} = \frac{M'\mu'}{M\mu}\,\frac{\cos^3\theta'}{\cos^3\theta},$$

d'où enfin

$$\frac{\rho M'}{\rho M} = \frac{MS}{M'S}\,\frac{M'T}{MT}\,\frac{\overline{KM'}^3}{\overline{KM}^3}.$$

Un cas particulièrement simple sera celui où le rapport $\frac{MS}{M'S} : \frac{MT}{M'T}$ sera harmonique ; nous aurons alors

$$\frac{\rho_{M'}}{\rho_M} = \frac{\overline{KM'}^3}{\overline{KM}^3}.$$

En voici deux exemples géométriques :

1° Les courbes (M) et (M') sont une seule et même conique, la courbe (K) est une droite. On voit que :

*Si les deux tangentes à une conique en* M *et* M' *se coupent en* K, *le rapport des rayons de courbure à cette courbe en* M *et* M' *est égal au cube du rapport* $\frac{KM}{KM'}$.

2° Les courbes (M) et (M′) sont une seule et même cubique, le point T est un point d'inflexion de cette courbe, le point K décrit alors la polaire harmonique (K) de T; d'où la proposition suivante :

*Une sécante issue d'un point d'inflexion* T *d'une cubique coupe la courbe en* M *et* M′, *les tangentes à la courbe en* M *et* M′ *se coupent en* K, *le rapport des rayons de courbure de la cubique en* M *et* M′ *est égal au cube du rapport* $\frac{KM}{KM'}$.

Ceci posé, les deux propositions de Ribaucour que je considère sont les suivantes :

*Question proposée* 858 (1868, p. 190; réimprimée 1917, p. 157).

*D'un point* M *dans le plan d'une conique, on mène à celle-ci les deux tangentes* MA *et* MB, *puis par* M, *on mène une droite* MC.

*Aux points* A *et* B *on construit les coniques ayant quatre points confondus avec la proposée et tangentes à* MC.

*Démontrer : 1° que ces coniques touchent* MC *au même point* C; *2° que si l'on fait tourner l'une d'elles de manière à la rabattre autour de* MC *du côté de la première, les coniques ainsi obtenues auraient en ce point un contact du troisième ordre, c'est-à-dire qu'elles auraient en* C *quatre points communs confondus.*

*Question proposée* 859 (1868, p. 190; réimprimée 1917, p. 157) :

*Démontrer la même proposition pour les courbes* *du troisième degré, lorsque* M *est sur la polaire d'un point d'inflexion.*

I. *Question* 858. — Soit $\mu$ le point où MC coupe AB, soient (E) la conique donnée, (A) et (B) les faisceaux formés par les coniques qui surosculent (E) en A et B, $\mu$ conjugué de M par rapport à (E) est le second point double de l'involution déterminée sur MC par les coniques (A) et (B); il existe donc deux coniques ($A_1$) et ($B_1$) se touchant en $\mu$. Une des propositions données plus haut montre qu'elles ont même rayon de courbure en $\mu$.

Soit $\mu'$ le conjugué harmonique de $\mu$ par rapport à A et B. La sécante commune à ($A_1$) et ($B_1$) qui correspond à MC passe par $\mu'$, si l'on fait correspondre aux points communs à ($A_1$) et ($B_1$) situés sur cette droite les points cycliques, ($A_1$) et ($B_1$) se transforment en deux cercles égaux tangents extérieurement, car $\mu'$ est évidemment un centre de similitude de ($A_1$) et ($B_1$). Il en résulte que si $\omega_1$ et $\omega_2$ sont les centres de ($A_1$) et ($B_1$), $\mu\omega_1$ et $\mu\omega_2$ sont conjugués harmoniques par rapport à $\mu$A et $\mu$M. Prenons la symétrique ($B'_1$) de ($B_1$) par rapport à M$\mu$ parallèlement à AB, ($B'_1$) aura son centre sur $\mu\omega_1$, axe d'aberration de courbure de ($A_1$) en $\mu$; comme elle a en ce point même rayon de courbure que (A), elle lui est surosculatrice en $\mu$.

*Question* 859. — Cette proposition n'est vraie que dans un cas particulier. Soit I le point considéré; si $IAB \equiv x = 0$, $MA \equiv z = 0$, $MB \equiv y = 0$, MA et MB étant les tangentes à la cubique en A et B, l'équation générale de celle-ci sera

$$yz[\alpha x + \beta y + \gamma z] + Bx^2(Ax + \beta y + \gamma z) = 0,$$

$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ étant la tangente d'inflexion.

Le faisceau (A) sera

$$Bx^2 + \mu z^2 + \frac{2(\alpha - A)}{\beta} xz + 2yz = 0.$$

Le faisceau (B) sera

$$Bx^2 + \mu_1 y^2 + \frac{2(\alpha - A)}{\gamma} xy + 2yz = 0.$$

Les polaires de M par rapport à (A) et (B) se coupent en un point $\mu$ fixe de la polaire harmonique ($\beta y - \gamma z = 0$ de I par rapport à la cubique); ce point $\mu$ n'est pas sur AB, sauf dans le cas où $A - \alpha = 0$, cas auquel la cubique se décompose.

Les coniques

$$(A_1) \equiv |B\beta x + (\alpha - A)z|^2 + 2B\beta[\beta y - \gamma z]z = 0,$$
$$(B_1) \equiv |B\gamma x + (\alpha - A)y|^2 + 2B\gamma[\gamma z - \beta y]y = 0$$

touchent $M\mu$ en $\mu$; les propositions démontrées plus haut montrent, du reste, qu'elles ont même rayon de courbure en $\mu$.

La sécante commune à $(A_1)$ et $(B_1)$ qui correspond à la tangente $M\mu$ a pour équation

$$2B\beta\gamma(\alpha - A)x + |(\alpha - A)^2 - 2B\beta\gamma|\,|\beta y + \gamma z| = 0;$$

elle passe par I, qui est du reste un centre de similitude de $(A_1)$ et $(B_1)$; un raisonnement identique à celui que nous avons fait plus haut montre, dès lors, que $(A_1)$ et la conique $(B'_1)$ obtenue en prenant la symétrique de $(B_1)$ par rapport à $M\mu$ parallèlement à $I\mu$, sont surosculatrices en $\mu$.

La proposition de Ribaucour est donc inexacte et, rectifiée, doit s'énoncer comme il suit :

*Si par un point d'inflexion* I *d'une cubique* $\Gamma$, *on mène une sécante coupant la courbe en* A *et* B, *il* *existe une conique* (A) *surosculatrice à* Γ *en* A *et une conique* (B) *surosculatrice à* Γ *en* B, *qui touchent la polaire harmonique* Δ *de* I *par rapport à* Γ *au même point* μ, *si* (B′) *désigne la conique obtenue en prenant la symétrique de* (B) *par rapport à* Δ, *parallèlement à* Iμ, (B′) *et* (A) *sont surosculatrices en* μ.