Nouvelles annales de mathématiques

N. Agronomof

Extension d'un théorème de M. S. Ôue

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 256-258

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__256_1>

[K²6]

EXTENSION D'UN THÉORÈME DE M. S. ÔUE;

PAR M. N. AGRONOMOF.

Dans *The Tôhoku Mathematical Journal* (1916, p. 225), M. S. Oue a énoncé le théorème suivant :

Étant donnés les points A_1, A_2, A_3, A_4 *sur une circonférence, les cercles d'Euler de trois quelconques de ces points concourent en un même point* (1, 2, 3, 4).

Étant donnés les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *sur une circonférence, les points* (2, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 5), (1, 2, 4, 5), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 3, 4) *sont sur une même circonférence* [1, 2, 3, 4, 5].

Étant donnés les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 *sur une circonférence, les cercles* [2, 3, 4, 5, 6], [1, 3, 4, 5, 6], [1, 2, 4, 5, 6], [1, 2, 3, 5, 6], [1, 2, 3, 4, 6], [1, 2, 3, 4, 5] *concourent en un même point* (1, 2, 3, 4, 5, 6), *etc.*

Voici une généralisation du théorème de M. S. Ôue :

Étant donnés n *points sur une hypersphère de* m *dimensions, les centres de gravité de* $(n-1)$ *quel-*

conques de ces points sont sur une même hypersphère $(1, 2, 3, \ldots, n)$.

Soit

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_m^2 = R^2$$

l'équation d'hypersphère. Si les coordonnées de n points sont

$$\begin{array}{lllll}
\alpha_{1,1}, & \alpha_{2,1}, & \alpha_{3,1}, & \ldots, & \sqrt{R^2 - \alpha_{1,1}^2 - \alpha_{2,1}^2 - \ldots - \alpha_{m-1,1}^2}, \\
\alpha_{1,2}, & \alpha_{2,2}, & \alpha_{3,2}, & \ldots, & \sqrt{R^2 - \alpha_{1,2}^2 - \alpha_{2,2}^2 - \ldots - \alpha_{m-1,2}^2}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\alpha_{1,n}, & \alpha_{2,n}, & \alpha_{3,n}, & \ldots, & \sqrt{R^2 - \alpha_{1,n}^2 - \alpha_{2,n}^2 - \ldots - \alpha_{m-1,n}^2};
\end{array}$$

celles de centres de gravité sont

$$\mathcal{G}(2, 3, \ldots, n) \left\{ \begin{array}{l}
\dfrac{\alpha_{1,2} + \alpha_{1,3} + \ldots + \alpha_{1,n}}{n-1}, \\[2ex]
\dfrac{\alpha_{2,2} - \alpha_{2,3} + \ldots + \alpha_{2,n}}{n-1}, \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\dfrac{\sqrt{R^2 - \alpha_{1,2}^2 - \ldots - \alpha_{m-1,2}^2} + \ldots + \sqrt{R^2 - \alpha_{1,n}^2 - \alpha_{2,n}^2 - \ldots - \alpha_{m-1,n}^2}}{n-1};
\end{array} \right.$$

$$\mathcal{G}(1, 3, \ldots, n) \left\{ \begin{array}{l}
\dfrac{\alpha_{1,1} + \alpha_{1,3} + \ldots + \alpha_{1,n}}{n-1}, \\[2ex]
\dfrac{\alpha_{2,1} + \alpha_{2,3} + \ldots + \alpha_{2,n}}{n-1}, \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\[2ex]
\dfrac{\sqrt{R^2 - \alpha_{1,1}^2 - \ldots - \alpha_{m-1,1}^2} + \ldots + \sqrt{R^2 - \alpha_{1,n}^2 - \ldots - \alpha_{m-1,n}^2}}{n-1};
\end{array} \right.$$

. . . .

On voit que, quelles que soient les valeurs de α, les points $\mathcal{G}$ sont sur une même hypersphère

$$\left(x_1 - \frac{\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \ldots - \alpha_{1,n}}{n-1}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{\alpha_{2,1} + \alpha_{2,2} + \ldots + \alpha_{2,n}}{n-1}\right) + \ldots$$
$$+ \left(x_n - \frac{\sqrt{R^2 - \ldots - \alpha_{m-1,1}^2} + \ldots - \sqrt{R^2 - \ldots - \alpha_{m-1,n}^2}}{n-1}\right)^2 = \frac{R^2}{(n-1)^2}.$$

Étant donnés $(n+1)$ *points* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n+1}$ *sur une hypersphère de m dimensions, les hypersphères* $(2, 3, \ldots, n+1)$, $(1, 3, \ldots, n+1)$, $\ldots$, $(1, 2, \ldots, n)$ *concourent en un même point* $[1, 2, \ldots, n+1]$.

Les équations $(2, 3, \ldots, n+1)$, ... sont

$$\left(x_1 - \frac{\alpha_{2,1} + \ldots + \alpha_{2,n+1}}{n-1}\right)^2 + \ldots$$
$$+ \left(x_n - \frac{\sqrt{R^2 - \ldots - \alpha_{m\,1,2}^2} + \ldots + \sqrt{R^2 - \ldots - \alpha_{m\,1,n+1}^2}}{n-1}\right)^2 = \frac{R^2}{(n-1)^2};$$
. . . .

On vérifie facilement que les hypersphères $(2, 3, \ldots, n+1)$, $(1, 3, \ldots, n+1)$, ... passent par le point

$$\frac{\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \ldots + \alpha_{1,n+1}}{n-1},$$
$$\frac{\alpha_{2,1} + \alpha_{2,2} + \ldots + \alpha_{2,n+1}}{n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Aussi même on peut démontrer que :

Étant donnés $(n+2)$ *points* $A_1, A_2, \ldots, A_{n+2}$ *sur une hypersphère de m dimensions, les points* $[2, 3, \ldots, n+2]$, $[1, 3, \ldots, n+2]$, $\ldots$, $[1, 2, \ldots, n+1]$ *sont sur une même hypersphère* $[1, 2, \ldots, n+2]$.

Étant donnés $(n+3)$ *points* $A_1, A_2, \ldots, A_{n+3}$ *sur une hypersphère de m dimensions, les hypersphères* $(2, 3, \ldots, n+3)$, $(1, 3, \ldots, n+3)$, $\ldots$, $(1, 2, \ldots, n+2)$ *concourent en un même point* $[1, 2, \ldots, n+3]$.

Etc.

Pour $m=2$, $n=3$, on retrouve les théorèmes de M. S. Òue.