

N. AGRONOMOF

Extension d'un théorème de M. S. Ôue

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 18
(1918), p. 256-258

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__256_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[K²6]

EXTENSION D'UN THÉORÈME DE M. S. ÔUE;

PAR M. N. AGRONOMOF.

Dans *The Tôhoku Mathematical Journal* (1916, p. 225), M. S. Ôue a énoncé le théorème suivant :

Étant donnés les points A_1, A_2, A_3, A_4 sur une circonférence, les cercles d'Euler de trois quelconques de ces points concourent en un même point $(1, 2, 3, 4)$.

Étant donnés les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sur une circonférence, les points $(2, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 5), (1, 2, 4, 5), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 3, 4)$ sont sur une même circonférence $[1, 2, 3, 4, 5]$.

Étant donnés les points $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ sur une circonférence, les cercles $[2, 3, 4, 5, 6], [1, 3, 4, 5, 6], [1, 2, 4, 5, 6], [1, 2, 3, 5, 6], [1, 2, 3, 4, 6], [1, 2, 3, 4, 5]$ concourent en un même point $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, etc.

Voici une généralisation du théorème de M. S. Ôue :

Étant donnés n points sur une hypersphère de m dimensions, les centres de gravité de $(n-1)$ quel-

conques de ces points sont sur une même hypersphère (1, 2, 3, ..., n).

Soit

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_m^2 = R^2$$

l'équation d'hypersphère. Si les coordonnées de n points sont

$$\begin{array}{ccccccc}
x_{1,1}, & x_{2,1}, & x_{3,1}, & \dots & \sqrt{R^2 - \alpha_{1,1}^2 - \alpha_{2,1}^2 - \dots - \alpha_{m-1,1}^2}, \\
x_{1,2}, & x_{2,2}, & x_{3,2}, & \dots & \sqrt{R^2 - \alpha_{1,2}^2 - \alpha_{2,2}^2 - \dots - \alpha_{m-1,2}^2}, \\
\dots, & \dots, & \dots, & \dots & \dots, \\
x_{1,n}, & x_{2,n}, & x_{3,n}, & \dots & \sqrt{R^2 - \alpha_{1,n}^2 - \alpha_{2,n}^2 - \dots - \alpha_{m-1,n}^2};
\end{array}$$

celles de centres de gravité sont

$$\begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \dots + \alpha_{1,n}}{n-1}, \\
\frac{\alpha_{2,1} + \alpha_{2,2} + \dots + \alpha_{2,n}}{n-1}, \\
\dots, \\
\frac{\sqrt{R^2 - \alpha_{1,2}^2 - \dots - \alpha_{m-1,2}^2} + \dots + \sqrt{R^2 - \alpha_{1,n}^2 - \alpha_{2,n}^2 - \dots - \alpha_{m-1,n}^2}}{n-1}, \\
\dots, \\
\frac{\alpha_{1,1} + \alpha_{1,3} + \dots + \alpha_{1,n}}{n-1}, \\
\frac{\alpha_{2,1} + \alpha_{2,3} + \dots + \alpha_{2,n}}{n-1}, \\
\dots, \\
\frac{\sqrt{R^2 - \alpha_{1,1}^2 - \dots - \alpha_{m-1,1}^2} + \dots + \sqrt{R^2 - \alpha_{1,n}^2 - \dots - \alpha_{m-1,n}^2}}{n-1}, \\
\dots
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \dots + \alpha_{1,n}}{n-1}, \\
\frac{\alpha_{2,1} + \alpha_{2,2} + \dots + \alpha_{2,n}}{n-1}, \\
\dots, \\
\frac{\sqrt{R^2 - \alpha_{1,2}^2 - \dots - \alpha_{m-1,2}^2} + \dots + \sqrt{R^2 - \alpha_{1,n}^2 - \alpha_{2,n}^2 - \dots - \alpha_{m-1,n}^2}}{n-1}, \\
\dots, \\
\frac{\alpha_{1,1} + \alpha_{1,3} + \dots + \alpha_{1,n}}{n-1}, \\
\frac{\alpha_{2,1} + \alpha_{2,3} + \dots + \alpha_{2,n}}{n-1}, \\
\dots, \\
\frac{\sqrt{R^2 - \alpha_{1,1}^2 - \dots - \alpha_{m-1,1}^2} + \dots + \sqrt{R^2 - \alpha_{1,n}^2 - \dots - \alpha_{m-1,n}^2}}{n-1}, \\
\dots
\end{array} \right.
\end{array}$$

On voit que, quelles que soient les valeurs de α , les points G sont sur une même hypersphère

$$\begin{aligned}
& \left(x_1 - \frac{\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \dots + \alpha_{1,n}}{n-1} \right)^2 + \left(x_2 - \frac{\alpha_{2,1} + \alpha_{2,2} + \dots + \alpha_{2,n}}{n-1} \right)^2 + \dots \\
& + \left(x_n - \frac{\sqrt{R^2 - \dots - \alpha_{m-1,1}^2} + \dots + \sqrt{R^2 - \dots - \alpha_{m-1,n}^2}}{n-1} \right)^2 = \frac{R^2}{(n-1)^2}.
\end{aligned}$$

Étant donnés (n + 1) points A₁, A₂, A₃, ..., A_{n+1} sur une hypersphère de m dimensions, les hypersphères (2, 3, ..., n + 1), (1, 3, ..., n + 1), ..., (1, 2, ..., n) concourent en un même point [1, 2, ..., n + 1].

Les équations (2, 3, ..., n + 1), ... sont

$$\left(x_1 - \frac{\alpha_{2,1} + \dots + \alpha_{2,n+1}}{n-1}\right)^2 + \dots$$

$$+ \left(x_n - \frac{\sqrt{R^2 - \dots - \alpha_{m-1,1}^2} + \dots + \sqrt{R^2 - \dots - \alpha_{m-1,n+1}^2}}{n-1}\right)^2 = \frac{R^2}{(n-1)^2};$$

.....

On vérifie facilement que les hypersphères (2, 3, ..., n + 1), (1, 3, ..., n + 1), ... passent par le point

$$\frac{\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \dots + \alpha_{1,n+1}}{n-1},$$

$$\frac{\alpha_{2,1} + \alpha_{2,2} + \dots + \alpha_{2,n+1}}{n-1},$$

.....

Aussi même on peut démontrer que :

Étant donnés (n + 2) points A₁, A₂, ..., A_{n+2} sur une hypersphère de m dimensions, les points [2, 3, ..., n + 2], [1, 3, ..., n + 2], ..., [1, 2, ..., n + 1] sont sur une même hypersphère [1, 2, ..., n + 2].

Étant donnés (n + 3) points A₁, A₂, ..., A_{n+3} sur une hypersphère de m dimensions, les hypersphères (2, 3, ..., n + 3), (1, 3, ..., n + 3), ..., (1, 2, ..., n + 2) concourent en un même point [1, 2, ..., n + 3].

Etc.

Pour m = 2, n = 3, on retrouve les théorèmes de M. S. Œue.