

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 18
(1918), p. 214-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__214_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2263.

(1915, p. 478.)

Dans un triangle ABC, A₁, B₁, C₁ sont les milieux des côtés BC, CA, AB ; D, E, F sont les contacts de ces côtés avec le cercle inscrit I, φ le point de Feuerbach et P₁, Q₁, R₁, P₂, Q₂, R₂ les projections orthogonales de φ sur les côtés des triangles A₁B₁C₁ et DEF. Démontrer les relations :

$$1^{\circ} \quad \frac{\varphi A_1 \times \varphi B_1 \times \varphi C_1}{\varphi D \times \varphi E \times \varphi F} = \left(\frac{R}{2r} \right)^2 ;$$

$$2^{\circ} \quad \frac{\sin A}{\varphi P_1} + \frac{\sin B}{\varphi Q_1} + \frac{\sin C}{\varphi R_1} = 0 ;$$

$$3^{\circ} \quad \frac{\cos \frac{A}{2}}{\varphi P_2} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\varphi Q_2} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\varphi R_2} = 0.$$

V. THÉBAULT.

SOLUTION

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

1^o Soient I et O les centres des cercles inscrit et circonscrit

au triangle ; on a, d'une part ⁽¹⁾,

$$\varphi A_1 = \frac{(b-c)R}{2OI}, \quad \varphi B_1 = \frac{(c-a)R}{2OI}, \quad \varphi C_1 = \frac{(a-b)R}{2OI}.$$

La solution de la question 2262 montre, d'autre part, que

$$\varphi D = k \frac{b-c}{\sin \frac{A}{2}}, \quad \varphi E = k \frac{c-a}{\sin \frac{B}{2}}, \quad \varphi F = k \frac{a-b}{\sin \frac{C}{2}}.$$

Le facteur k se calcule en exprimant que la somme algébrique des aires $E\varphi F$, $F\varphi D$, $D\varphi E$ est égale à celle du triangle DEF. On a ainsi

$$-k^2 \sum \frac{(c-a)(a-b)}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \cos \frac{A}{2} = 2S',$$

S' désignant l'aire du triangle DEF. Si l'on observe que

$$-\Sigma a(c-a)(a-b) = 4S(R-2r),$$

$$S' = 2r^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

on obtient aisément

$$k^2 = \frac{r^2}{4R(R-2r)} = \frac{r^2}{4OI^2},$$

et, par suite,

$$\varphi D = \frac{(b-c)r}{2OI \sin \frac{A}{2}}, \quad \varphi E = \frac{(c-a)r}{2OI \sin \frac{B}{2}}, \quad \varphi F = \frac{(a-b)r}{2OI \sin \frac{C}{2}}.$$

Par conséquent

$$\frac{\varphi A_1 \times \varphi B_1 \times \varphi C_1}{\varphi D \times \varphi E \times \varphi F} = \frac{R^3}{r^3} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{R^3}{r^3} \frac{r}{4R} = \left(\frac{R}{2r} \right)^2.$$

2° et 3° Les relations proposées résultent immédiatement de l'équation du cercle circonscrit à un triangle en coordonnées normales, si l'on observe que les côtés du triangle $A_1B_1C_1$

⁽¹⁾ Voir *Journal de Vuibert*, 34^e année, p. 5 et p. 51. Voir aussi *Mathesis*, 1914, solution de la question 1934.

sont proportionnels à $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ et ceux du triangle DEF proportionnels à $\cos \frac{1}{2} A$, $\cos \frac{1}{2} B$, $\cos \frac{1}{2} C$. La relation du 2^o s'applique à tout point du cercle des neuf points, celle du 3^o à tout point du cercle inscrit.

Au moyen des relations

$$\begin{aligned}\varphi P_1 : \varphi Q_1 : \varphi R_1 &= \frac{1}{b-c} : \frac{1}{c-a} : \frac{1}{a-b}, \\ \varphi P_2 : \varphi Q_2 : \varphi R_2 &= \frac{\sin \frac{1}{2} A}{b-c} : \frac{\sin \frac{1}{2} B}{c-a} : \frac{\sin \frac{1}{2} C}{a-b},\end{aligned}$$

on obtient aisément des relations qui ne s'appliquent qu'au point φ , par exemple :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varphi P_1} + \frac{1}{\varphi Q_1} + \frac{1}{\varphi R_1} &= 0, \\ \frac{b+c}{\varphi P_1} - \frac{c+a}{\varphi Q_1} + \frac{a+b}{\varphi R_1} &= 0, \\ \frac{\sin \frac{A}{2}}{\varphi P_2} - \frac{\sin \frac{B}{2}}{\varphi Q_2} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{\varphi R_2} &= 0, \\ \frac{\cos^3 \frac{A'}{2}}{\varphi P_2} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\varphi Q_2} + \frac{\cos^3 \frac{C}{2}}{\varphi R_2} &= 0\end{aligned}$$

Autres solutions par MM. R. BOUVAIST et ONO.

2264.

(1915, p. 478)

Démontrer que, si la tangente en P à une courbe (P) quelconque coupe les axes rectangulaires Ox et Oy en S et T, et si la tangente en la courbe (M), que décrit le milieu M de ST, coupe Ox et Oy en U et V, on aura

$$\frac{MU}{MV} = \frac{PS}{PT},$$

et déduire de là une construction géométrique de la tangente UV quand le point P est donné et réciproquement.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Soient M', U', V' les symétriques de O par rapport à M, U, V . Les coordonnées ξ, η de M' sont fonctions d'un paramètre t ; l'équation TS et l'équation dérivée par rapport à t s'écrivent

$$\eta x + \xi y = \xi \eta, \quad \eta' x + \xi' y = \xi' \eta + \eta' \xi.$$

En désignant par P' la projection de P sur Ox , on a donc

$$TP : TS = OP' : OS = \frac{\eta' \xi}{\eta' \xi - \eta \xi'}.$$

D'autre part, l'équation de la tangente en M' au lieu de ce point étant

$$\xi' (y - \eta) = \eta' (x - \xi),$$

on a

$$V'M' : V'U' = \frac{\eta' \xi}{\eta' \xi - \eta \xi'} - TP : TS.$$

Par suite,

$$MU : MV = M'U' : M'V' = PS : PT.$$

Si l'on appelle K le point où $M'P'$ rencontre Ox , on a la relation

$$KS : TM' = PS : TP = M'U' : M'V' = SU' : TM'.$$

Par conséquent $KS = SU'$; $M'P$ et $M'U$ ont des directions symétriques par rapport à Ox . La tangente en M à la courbe (M) s'obtient donc en menant par M une droite ayant une direction symétrique, par rapport à Ox , de celle qui joint P au symétrique de O par rapport à M . Réciproquement, pour déduire le point P de la tangente en M à la courbe (M) , il suffit de mener par le symétrique de O par rapport à M une droite ayant une direction symétrique de celle de UV par rapport à Ox ; l'intersection de cette droite avec TS est le point P cherché.

AUTRE SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

Soient ST et $S'T'$ les tangentes à (P) en deux points voisins P et P' , M et M' les milieux des segments interceptés sur elles

par Ox et Oy , u et v les points où MM' coupe Ox et Oy . Comme M est le milieu de ST , on a (*fig. 1*)

$$-\frac{vT}{vO} = \frac{uS}{uO},$$

de même

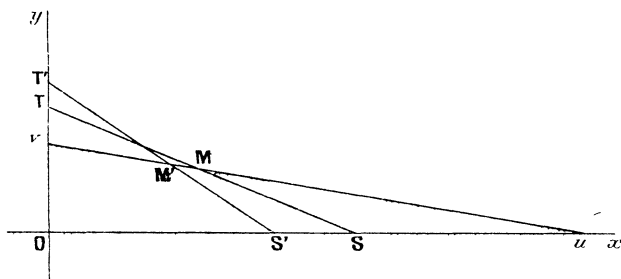
$$-\frac{vT'}{vO} = \frac{uS'}{uS},$$

par conséquent

$$\frac{vT}{vT'} = \frac{uS}{uS'},$$

d'où il résulte que ST , $S'T'$, MM' sont tangentes à une parabole inscrite à l'angle $\widehat{xOy}$. Si P' vient se confondre avec P , et par suite M' avec M , on voit (*fig. 2*) que la tangente UMV en M à (M) touche la parabole (K) inscrite à $\widehat{xOy}$ et tangente en P à ST ; on a donc bien la relation demandée, d'après le théorème de Chasles relatif au rapport anharmonique des traces, sur une tangente mobile, de quatre tangentes fixes à une conique.

Fig. 1.

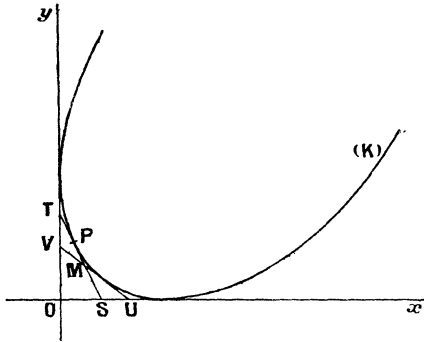


Supposant P connu ainsi que la tangente ST à (P) en ce point, la construction de la tangente UV en M à (M) revient à la détermination de la deuxième tangente menée de M à la parabole (K) ; mais voici une construction élémentaire (*fig. 3*): si nous supposons le problème résolu, et si nous appelons M_1 le point où OM coupe la parallèle TU_1 à VU , nous pouvons écrire

$$\frac{M_1U_1}{M_1T} = \frac{MU}{MV} = \frac{PS}{PT},$$

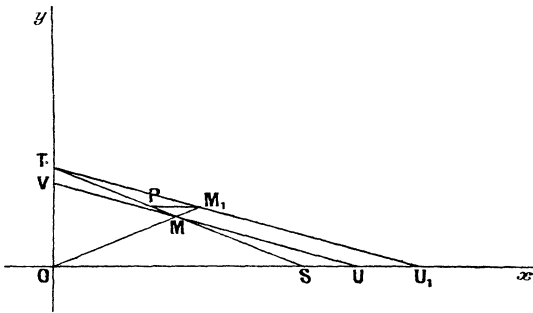
par conséquent PM_1 est parallèle à Ox ; connaissant P et ST , on a donc aisément M_1 , puis U_1 , et la parallèle menée par M à TU_1 est la tangente cherchée.

Fig. 2.



Inversement, étant donné M et la tangente UV en ce point à (M) , on a de suite la droite TS ayant son milieu en M , puis TU_1 parallèle à UV , d'où M_1 sur cette droite et sur OM , et la parallèle menée par M_1 à Ox coupe ST au point P .

Fig. 3.



Tout ce qui précède s'étend immédiatement au cas où les axes Ox et Oy ne se coupent pas à angle droit et où M , au lieu d'être le milieu de ST , partage ce segment de droite dans un rapport donné; par suite les tangentes aux divers points de ST aux courbes correspondantes enveloppent la parabole (K) .

On en conclut ce théorème : la normale à une conique Σ coupant ses axes en S et T, on sait que le point M tel que $\frac{MS}{MT} = k$ décrit une conique (M); les tangentes aux coniques (M), obtenues quand k varie, aux points M correspondants de la normale, enveloppent une parabole qui touche les axes de Σ , la normale et la tangente en M; on sait d'ailleurs que cette parabole touche la normale au centre de courbure de Σ au point M.

Autres solutions, par UN ABONNÉ, MM. R. BOUVAIST et T. ONO.

2265.

(1913, p. 478.)

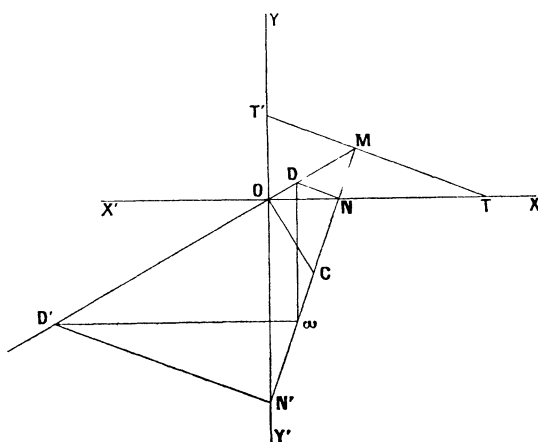
Construire les foyers et les sommets de l'axe focal d'une conique dont on donne un point, le centre de courbure correspondant, et : 1° soit un axe ; 2° soit le centre.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

1° Soient $X'OX$ l'axe focal, $Y'OY$ l'autre axe d'une conique,



M un point de la courbe, T et T', N et N' les points où la tangente et la normale coupent ces axes, ω le centre de

courbure en M , D et D' les points où les parallèles à TT' menées par N et N' coupent OM : on sait que les parallèles menées par D et D' respectivement à YY' et XX' passent en ω (construction de Mannheim). Si l'on suppose donné le point M , le centre de courbure ω en ce point, et l'axe $X'OX$, la perpendiculaire en N à la normale et la perpendiculaire menée de ω sur l'axe se rencontrent en D ; joignant DM , on obtient le centre O , puis l'axe $Y'OY$, d'où les points N' et T' ; le cercle de diamètre $N'T'$ coupe l'axe focal aux foyers de la conique ; ayant les foyers et un point de la courbe, on obtient sans peine les sommets de l'axe focal. La courbe est une ellipse ou une hyperbole suivant que N est, ou non, situé entre les foyers.

2° La perpendiculaire en O à OM coupant la normale en C , on sait que ωC et NN' ont le même milieu, d'où la construction suivante, si l'on suppose donnés M , ω , et O : traçant la perpendiculaire en O à OM , on a le point C ; du milieu de ωC comme centre, si l'on décrit une circonférence qui passe en O , elle coupe la normale en N et N' ; les droites ON et ON' sont les axes, et l'on termine la construction comme ci-dessus, construction qui s'applique aussi bien si l'on suppose connue l'axe $Y'OY$ que l'axe $X'OX$.

Autres solutions, par UN ABONNÉ, MM. R. BOUVAIST et T. ONO.

2266.

(1915, p. 478.)

On considère toutes les conchoïdes d'une courbe (M), quelconque par rapport à un pôle O. Pour chaque position du rayon vecteur OM, le lieu des centres de courbure répondant à toutes ces conchoïdes est une conique Γ dont on donnera une détermination géométrique complète. Reconnaître à quelle condition géométrique Γ est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, en remarquant qu'elle ne peut jamais être un cercle. Examiner spécialement le cas où la courbe (M) est une spirale d'Archimède de pôle O et déterminer dans ce cas les axes de la conique Γ .

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Les conchoïdes d'une courbe (M), par rapport au pôle O , sont les podaires, par rapport à ce point, des courbes parallèles

à l'antipodaire (P) de (M). Appelons P le point où la perpendiculaire élevée en M sur OM touche la courbe (P), C_1 le centre de courbure de (P) en P, et A la projection de O sur PC_1 . Le centre de courbure C de la conchoïde décrite par un point M' de OM s'obtient donc de la manière suivante : on projette M' en P' sur AC_1 , puis C_1 en Q sur OP' , et Q en R sur AC_1 ; le point C est à l'intersection de M'A avec OR. Comme le point Q décrit le cercle (ω) ayant OC_1 pour diamètre, le lieu considéré dans l'énoncé revient donc au suivant : la parallèle à OA menée par un point variable Q de (ω) recoupe ce cercle en Q' et rencontre AC_1 en R; lieu du point d'intersection de Q'A et OR. A une droite Q'A correspond une droite OR; à une droite OR correspondent deux droites AQ'. Le point C décrit donc une cubique; comme la droite OA fait partie du lieu, le lieu proprement dit est une conique Γ . Elle passe par A, C_1 et par les milieux ω et A' de OC_1 et OA; elle est de plus tangente au cercle (ω) en A.

Le centre et les axes de Γ s'obtiennent par une construction simple. Le diamètre du cercle (ω) parallèle à OA rencontre ce cercle en B et B' et la droite AC_1 en D, les droites AB et AB' rencontrent OD en deux points E et E' de Γ ; le milieu K de EE' est le centre de la conique. La droite OD est, en effet, un diamètre de Γ puisqu'elle passe par les milieux des cordes parallèles A' ω et C_1A .

Soient T et T' les milieux de AE et AE'; les axes de Γ sont dirigés suivant KT et KT'. Les tangentes à Γ en E et E' sont parallèles à C_1A et coupent respectivement KT et KT' en L et L'; pour obtenir les longueurs des demi-axes de Γ il suffit de construire les moyennes proportionnelles à KT et KL, d'une part, et à KT' et KL', d'autre part.

Des considérations qui précèdent, on déduit aussi que (ω) est le cercle osculateur de la conique Γ au point M. Le point ω est donc l'une des intersections de Γ avec sa développée. On peut encore observer qu'en considérant les cas où QR est tangent au cercle (ω), on obtient les points de Γ dont les tangentes passent par O.

Si le point Q' est situé sur l'arc C_1A du cercle (ω) et si, en outre, $Q'R = OA$, les droites Q'A et OR sont parallèles. On en déduit que Γ est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que OC_1 est inférieur, égal ou supérieur à 3 OA. La nature des intersections de Γ avec le cercle (ω) montre

d'ailleurs que Γ ne peut jamais être un cercle. Revenant à l'énoncé de la question, on peut énoncer ainsi les conditions qui précèdent :

La conique Γ est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que la distance de O au centre de courbure de l'antipodaire (P) de (M) au point correspondant à M est inférieure, égale ou supérieure au triple de la distance de O à la normale de (P) .

Dans le cas où (Γ) est une parabole, E' est à l'infini; le sommet est au milieu de LT et le foyer est à l'intersection de LT avec la médiatrice de EL .

Quand (M) est une spirale d'Archimède de pôle O , (P) est une développante de cercle et C_1 coïncide avec A ; Γ est donc alors une ellipse. Le point A et le milieu A' de OA sont les sommets de l'un des axes de Γ . D'après ce qui précède, A' est le centre de courbure de Γ au point A ; on a donc, en désignant les demi-axes de Γ par α et β ,

$$\beta = \frac{1}{2} AA', \quad \alpha^2 : \beta = AA'.$$

L'un des axes est donc AA' , l'autre est égal au côté du carré inscrit dans le cercle décrit sur OA comme diamètre.

Autres solutions, par UN ABONNÉ et par M. R. BOUVAIST.

2267.

(1915, p. 479.)

Démontrer géométriquement que si la normale en un point M d'une parabole rencontre en N l'axe de cette courbe, en P la tangente au sommet, et que si Q est le milieu de MN , le rayon de courbure en M est le double de PQ .

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soit T l'intersection de la tangente en M avec la tangente au sommet, soit F le foyer, soit enfin T_1 le symétrique de T par rapport à Q , les trois points T, Q, T_1 se trouvant du reste sur une même parallèle à l'axe. Le cercle des centres, relatif à la position considérée de l'angle mobile FTM , est le cercle FQT_1 , coupé par TF en C , le rayon de courbure cherché est

égal à TC , or on a

$$TC.TF = \overline{TQ}^2 = 2PQ.MQ = 2PQ.TF,$$

d'où

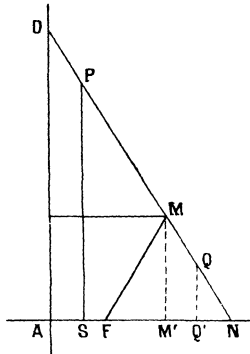
$$TC = 2MQ.$$

AUTRE SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

Soient F le foyer de la parabole, Δ sa directrice, S son sommet, A le point commun à Δ et à l'axe, D le point où la

Fig. 1.



normale en M coupe Δ , M' et Q' les projections de M et Q sur l'axe.

Comme $M'N = AF$, on a

$$M'Q' = AS. \quad \text{d'où} \quad QM = PD,$$

et par conséquent

$$PQ = DM,$$

ce qui démontre le théorème, puisque le rayon de courbure en M est le double de DM .

On peut ajouter les observations suivantes :

1° Mener MJ parallèle à l'axe ANX , et NJ perpendiculaire

à MN. Le centre de courbure ω est à la rencontre de MN avec la perpendiculaire $J\omega$ à JM.

MJNT est un parallélogramme. Les triangles rectangles P'TN, MJ ω sont égaux, etc.

2° Achever le rectangle NMTK et le parallélogramme NP'TI.

On sait que MK passe par le foyer F et que K ω , perpendiculaire à MFK, passe par le centre de courbure ω .

NKI ω est un rectangle, etc.

3° Mener FC perpendiculaire à MF. On sait que le point C où elle rencontre MN est au milieu du rayon de courbure M ω , etc.

Addition par M. H. BROCARD. — Le cercle de courbure en M rencontre la parabole en un autre point R, et la corde commune RM est symétrique de MT par rapport à MM'. La perpendiculaire à RM menée par ω et la droite NX déterminent des triangles rectangles égaux, dont on déduit aisément

$$\omega M = \frac{MT}{\sin \alpha \cos \alpha} = \rho_M,$$

α étant l'angle MTN.

On a ensuite

$$UM = \rho_M \sin 2\alpha = 2MT.$$

MR rencontre AN en V, et l'on sait que V est le milieu de UM, ou que la corde MR est quadruple de la tangente MT, relation signalée ici par G. de Longchamps (1880, p. 68-71), parmi d'autres propriétés que le lecteur pourra tirer de la figure décrite ci-dessus.

Note. — Sur la même figure il pourra être intéressant de considérer aussi la corde RM commune à la parabole et au cercle de courbure en M.

Le milieu S de RM est la projection de C sur RM.

D'après une propriété connue, RM est symétrique de MT par rapport à MA.

Soient V, L, G les rencontres de RM, BC, CS avec O α , et δ l'angle MT α . On voit que MC, BC, GC, perpendiculaires à MT, O α , MR, forment entre elles l'angle δ .

Dans la série de triangles rectangles à angle δ , ainsi déter-

minés, on obtient facilement les relations

$$CM = \frac{MT}{\sin \delta \cos \delta}$$

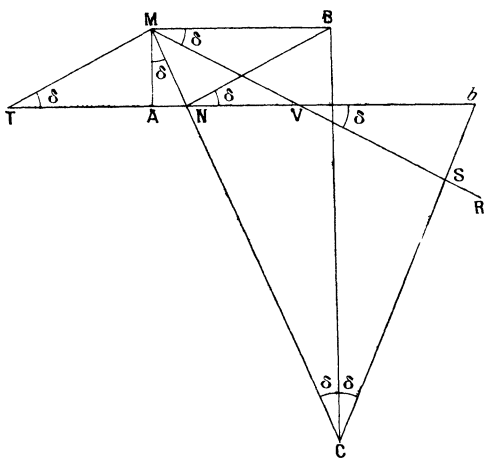
et

$$SM = CM \sin 2\delta = 2 MT;$$

donc

$$RM = 2 SM = 4 MT.$$

Fig. 2.



La corde ci-dessus est donc quadruple de la tangente MT , propriété signalée ici par G. de Longchamps (1880, p. 68-71).

Le lecteur pourra aisément ajouter d'autres propositions.

Autres solutions par UN ABONNÉ et par MM. T. ONO et V. TRÉBAULT.

2268.

(1915, p. 479.)

Si, d'un point M pris sur une conique, on mène à cette courbe les trois normales MP, MQ, MR, autres que la normale en M, le triangle PQR, inscrit à la conique donnée, est en même temps circonscrit à une conique fixe.

G. FONTENÉ.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Cette proposition et celle de la question 2259, résolue (1916, p. 447), sont évidemment polaires réciproques par rapport à la conique donnée; il suffit donc d'établir l'une des deux, la première par exemple.

Soient M le point considéré de l'ellipse (E) , α, β, γ les contacts avec E des droites QR, RP, QP . Désignons par U et V les intersections avec l'axe focal de $\beta\gamma$ et $M\alpha$, U et V appartiennent à une involution dont le point central est le centre O de (E) et dont deux couples de points conjugués sont les sommets de (E) situés sur l'axe focal, on a donc

$$OU.OV = -\alpha^2,$$

on aura de même

$$OU'.OV' = -b^2,$$

U' et V' désignant les points d'intersection des droites considérées avec le petit axe. Ces relations montrent que la projection du point P sur les axes de (E) est sur la symétrique de $M\alpha$ par rapport à O , le point P est donc le pôle par rapport au cercle décrit sur les foyers de (E) comme diamètre de la tangente au point α' de (E) symétrique de α par rapport au petit axe. Il appartient donc à l'ellipse ayant pour sommets les sommets de la développée de (E) .

AUTRE SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

On sait (question 2259) que le triangle normal circonscrit, formé par les tangentes en P, Q, R à la conique, est inscrit à la conique (Γ) ayant ses sommets aux rebroussements de la développée de la première; par conséquent le triangle PQR est circonscrit à la conique (Γ') polaire réciproque de (Γ) par rapport à la conique donnée.

Autre solution de M. T. ONO. Voir aussi, page 84, Corresp., M. F. BALITRAND.

2270.

(1915, p. 479.)

Démontrer que le cône qui a pour sommet le point double d'une courbe de Viviani et pour base cette courbe est de révolution.

F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Soient S et Γ la sphère et le cylindre dont l'intersection est la courbe de Viviani V. Le centre O de S et le point double A de la courbe V se projettent en O' et A' sur un plan perpendiculaire à l'axe de Γ ; ce plan coupe S et Γ suivant deux cercles qui se rencontrent en deux points M et M' de V. Le second de ces cercles a O'A' pour diamètre. Les triangles rectangles O'MA', MO'O sont égaux; par suite,

$$MA' = OO' = AA'.$$

L'angle MAA' vaut donc 45°; par conséquent, le cône qui provient de la révolution de A est de révolution et l'angle au sommet vaut 90°.

Autres solutions, par MM. R. BOUVAIST et J. LEMAIRE.

2271.

(1915, p. 531)

Étant donnée une hyperbole par ses asymptotes et un point M, démontrer que le centre de courbure en M peut être obtenu par l'une des constructions géométriques suivantes :

1° *On mène la tangente en M qui coupe les asymptotes en A et B, et l'on élève en ces points les perpendiculaires aux asymptotes qui coupent la normale en M respectivement en α et β et se rencontrent en P. On joint PM et, par α , on mène une parallèle à la tangente en M; la parallèle à PB, menée par le point d'intersection de ces deux droites, passe par le centre de courbure.*

2° *On joint B α , et, par β , on mène une parallèle à PA; la parallèle à la tangente en M, menée par le point de rencontre de ces deux droites, passe au centre de courbure.*

3° *On joint B α , et, par M, on mène une parallèle à PA; la parallèle à PB, menée par le point de rencontre de ces deux droites, passe au centre de courbure.*

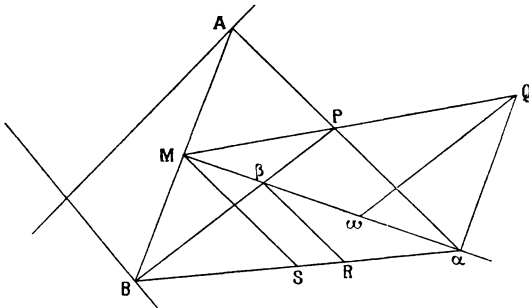
F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

Il suffit de prouver que ces diverses constructions donnent le milieu de $\alpha\beta$ qui est, comme on sait, le centre de courbure de l'hyperbole en M.

1° Si Q est le point commun à PM et à la parallèle menée



par α à la tangente en M, le théorème de Thalès donne, en appelant ω le point où la parallèle à PB menée par Q rencontre la normale,

$$\frac{\omega\beta}{M\beta} = \frac{QP}{MP},$$

et, à cause des triangles semblables PMA et PQ α ,

$$\frac{\omega\beta}{M\beta} = \frac{Q\alpha}{MA};$$

d'ailleurs, les triangles Q $\alpha\omega$ et BM β sont semblables, et

$$\frac{\omega\alpha}{M\beta} = \frac{Q\alpha}{MB};$$

comme $MA = MB$, on a bien $\omega\beta = \omega\alpha$, c. q. f. d.

2° Soit R le point de rencontre de B α et de la parallèle menée par β à PA; le triangle αAB étant isocèle, αM est bissectrice de $\widehat{A\alpha B}$; comme $\widehat{R\beta\alpha} = \widehat{A\alpha M}$, le triangle R $\alpha\beta$ est aussi isocèle, et la parallèle menée par R à la tangente en M, étant perpendiculaire à la base $\alpha\beta$, passe au milieu de cette base, c'est-à-dire au centre de courbure.

3° S désignant le point où la parallèle menée par M à PA coupe B α , ce point est le milieu de B α , puisq. M est le milieu de AB; par suite, la parallèle menée par S à PB passe au milieu de $\alpha\beta$.

C. Q. F. D.

Autres solutions, par MM. R. GOORMAGHTIGH, T. ONO et PH. DU PLESSIS.

2272.

(1915, p. 531.)

On mène d'un point M les quatre normales à une ellipse (E) et les tangentes à cette ellipse aux pieds des normales. Il existe une parabole (P) et une seule qui touche ces quatre tangentes. Démontrer que les points où elle la touche sont sur l'hyperbole d'Apollonius (H) de M.

F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. R. BRICARD.

Soit α l'un des points de rencontre de (H) avec (E), c'est-à-dire le pied de l'une des normales abaissées de M sur (E). La tangente en α à (E) rencontre de nouveau (H) en un point α' . L'angle $\widehat{M\alpha\alpha'}$ étant droit, il en résulte, en vertu d'une propriété bien connue de l'hyperbole équilatère, que M α' est perpendiculaire à la tangente en α à (H). Mais on sait que (H) peut être définie comme lieu des points tels que les perpendiculaires abaissées de ces points sur leurs polaires par rapport à (E) passent en M. Il résulte de là que le point α' est le pôle, par rapport à (E), de la tangente en α à (H).

Cela posé, la polaire réciproque de (H), par rapport à (E), doit être tangente à la polaire du centre de (E), c'est-à-dire à la droite de l'infini. C'est donc une parabole, qui touche en outre les quatre tangentes analogues à $\alpha\alpha'$, et se confond par conséquent avec la parabole (P) de l'énoncé. (P) touche $\alpha\alpha'$ au pôle de la tangente en α à (H), c'est-à-dire, comme on vient de le voir, au point α' qui appartient à (H), et la proposition est ainsi établie.

Autres solutions, par MM. R. BOUVAIST, J. LÉMAIRE, et l'AUTEUR.

2273.

(1915, p. 531.)

Si A et A' sont deux points de rebroussement diamétralement opposés d'une hypocycloïde à quatre rebrousse-

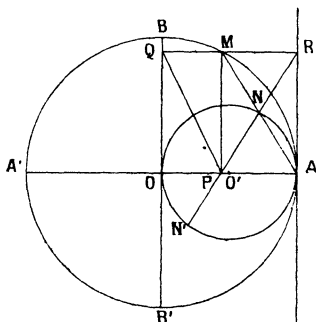
ments, les bissectrices des angles que les tangentes à cette courbe font avec AA' ont pour enveloppes les deux hypocycloïdes à trois rebroussements ayant l'un un point de rebroussement en A et le sommet opposé en A' , et l'autre vice versa.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

Soient O le centre du cercle de diamètre AA' contenant les quatre points de rebroussement de la première courbe, M un point de ce cercle, P et Q ses projections sur AA' et sur le



diamètre perpendiculaire BB' , R la projection du même point sur la tangente en A au cercle; comme $QR = OA = QP$, le triangle QRP est isocèle et PR est bissectrice de $\widehat{APQ}$: c'est de cette droite qu'il s'agit de chercher l'enveloppe.

Observons que PR est la droite de Simson relative au point M et au triangle inscrit dans le cercle O et ayant un sommet en A' et deux sommets confondus en A ; triangle dont le cercle des neuf points est le cercle O' de diamètre OA : l'enveloppe de cette droite est donc l'hypocycloïde à trois rebroussements tritangente à ce dernier cercle, qu'elle touche en A , et ayant par suite un point de rebroussement en A' . Même raisonnement pour l'autre bissectrice, qui est la droite joignant le point P à la projection de M sur la tangente en A' au cercle O .

Autrement: les deux cercles O et O' étant homothétiques par rapport à A , le point N où AM coupe O' est le milieu

de AM, et par suite aussi de PR; si N' est le second point commun à PR et au cercle O', l'angle $\widehat{ANN'}$ est double de l'angle $\widehat{RAN}$; l'arc AN' est donc double de l'arc AN; et comme ces arcs sont de sens contraires, la droite NN' enveloppe bien une hypocycloïde à trois rebroussements circonscrite au cercle O' et touchant ce cercle en A.

Autres solutions, par MM. R. BOUVAIST et UN ABONNÉ.

2274.

(1915, p. 572.)

Dans un triangle ABC, L_a, L_b, L_c sont les centres des cercles exinscrits. Les droites qui joignent les sommets au point de Lemoine du triangle $L_a L_b L_c$ rencontrent les côtés BC, CA, AB respectivement en α, β, γ . Montrer que le cercle $\alpha\beta\gamma$ passe au point φ de Feuerbach du triangle ABC.

V. THÉBAULT.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ les distances du point de Lemoine L du triangle $L_a L_b L_c$ aux côtés $L_b L_c, L_c L_a, L_a L_b$, on a

$$\frac{\Delta_a}{L_c L_b} = \frac{\Delta_b}{L_c L_a} = \frac{\Delta_c}{L_a L_b},$$

d'où

$$\frac{\Delta_a \sin \frac{A}{2}}{a} = \frac{\Delta_b \sin \frac{B}{2}}{b} = \frac{\Delta_c \sin \frac{C}{2}}{c},$$

si maintenant $\delta_a, \delta_b, \delta_c$ désignent les distances du point L aux côtés BC, CA, AB, on a visiblement

$$\begin{aligned} \delta_b + \delta_c &= 2 \Delta_a \sin \frac{A}{2}, & \delta_c + \delta_a &= 2 \Delta_b \sin \frac{B}{2}, \\ \delta_a + \delta_c &= 2 \Delta_c \sin \frac{C}{2}, \end{aligned}$$

d'où, r_a, r_b, r_c désignant les rayons des cercles exinscrits,

$$r_a \delta_a = r_b \delta_b = r_c \delta_c.$$

Soit maintenant $L'_a L'_b L'_c$ le triangle formé en menant par $L_a,$

L_b, L_c des parallèles à BC, CA, AB , les triangles $ABC, L'_a L'_b L'_c$ sont homothétiques, soit L' le centre d'homothétie, si $\delta'_a, \delta'_b, \delta'_c$ désignent les distances de L' à BC, CA, AB on aura, par construction même,

$$\frac{\delta'_a}{r_a} = \frac{\delta'_b}{r_b} = \frac{\delta'_c}{r_c}.$$

L et L' sont donc inverses par rapport à ABC ; or le centre O du cercle circonscrit à $L_a L_b L_c$, qui est inscrit dans $L'_a L'_b L'_c$, et le centre I du cercle inscrit dans ABC , sont deux points homologues; le point L' est donc sur la droite OI , le point L est par suite sur l'hyperbole équilatère $ABCI$, et le cercle $\alpha\beta\gamma$ circonscrit au triangle α, β, γ conjugué à cette hyperbole, passera par le point de Feuerbach φ , centre de cette courbe.

Remarques. — 1° Soit M un point quelconque de l'hyperbole équilatère $ABCI$; les droites AM, BM, CM , coupent BC, CA, AB , en α, β, γ ; le cercle $\alpha\beta\gamma$, circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ conjugué à l'hyperbole $ABCI$, passera par le point de Feuerbach φ , centre de cette courbe, d'où les propositions suivantes

Soient D, E, F les points de contacts de côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC avec le cercle I inscrit dans ce triangle; si à partir du point I nous portons sur ID, IE, IF et dans le même sens des segments égaux, ID', IE', IF' , les droites AD', BE', CF' coupent BC, CA, AB en α, β, γ ; le cercle $\alpha\beta\gamma$ passe par le point de Feuerbach du triangle ABC .

En particulier le cercle passant par les pieds des bissectrices intérieures d'un triangle passe par le point de Feuerbach.

2° Soit ABC un triangle, soit M un point de son plan; les droites AM, BM, CM coupent BC, CA, AB , en α, β, γ ; le cercle $\alpha\beta\gamma$ rencontre encore les côtés du triangle en α', β', γ' ; les droites $A\alpha', B\beta', C\gamma'$ se coupent en M' . Le cercle $\alpha\beta\gamma$ coupe le cercle des neuf points du triangle ABC aux centres ω_1 et ω_2 des hyperboles équilatères $ABCM, ABCM'$. Si le cercle $\alpha\beta\gamma$ est inscrit dans ABC , ω_1 et ω_2 sont confondus, les deux cercles sont tangents. On retrouve ainsi très simplement le théorème de Feuerbach.

Autres solutions par l'AUTEUR et par M. R. GOORMAGHTIGH.

2275.

(1915 p. 53*)

Les asymptotes d'une hyperbole et les droites qui joignent un point quelconque de cette courbe à ses deux foyers sont tangentes à un même cercle.

M. D'OCAGNE

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE

Soient M un point quelconque de l'hyperbole ⁽¹⁾, O son centre, F et F' ses foyers, 2a son axe transverse, de sorte que $MF - MF' = 2a$.

Le point I ou la normale en M coupe l'axe non transverse est le centre d'un cercle touchant le prolongement de FM en A, et F'M en A', si l'on observe que $AF = A'F$, la relation ci-dessus donne $MA = MA' = a$. D'ailleurs, le cercle circonscrit au triangle MFF' passe en I, et les angles $\widehat{MIA}$ et $\widehat{F'IO}$ sont égaux, les triangles MIA et F'IO sont alors semblables et donnent

$$\frac{IA}{IO} = \frac{a}{c},$$

c demi-distance focale, les tangentes menées de O au cercle I, faisant avec OI des angles qui ont $\frac{a}{c}$ pour sinus, sont les asymptotes de l'hyperbole, ce qui démontre la proposition.

Autres solutions, par L. N. ABONNI et par M. T. ONO

2276

(1915 p. 53*)

Étant données dans un plan deux coniques f et φ , les tangentes menées à φ des foyers de f et les tangentes menées à f des foyers de φ sont huit tangentes d'une même conique.

F. BALITRAND

SOLUTION

Par M. G. HUMBERT

Le théorème proposé est un cas particulier d'une proposition relative aux courbes de quatrième classe.

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

Soit C_4 une courbe d'ordre quatre; une conique σ_1 la coupe en huit points; si l'on joint ceux-ci deux à deux par quatre droites (chaque droite contenant deux points, et par chaque point ne passant qu'une droite), les quatre droites coupent de nouveau C_4 en huit points, qui sont sur une conique σ_2 .

C'est là un théorème bien connu : transformons-le par polaires réciproques, en supposant la conique σ_1 formée de deux droites.

Par deux points, I et J, on mène les tangentes à une courbe Γ_4 de quatrième classe, ce qui donne deux systèmes de chacun quatre droites, $d_1, \dots, d_4$ et $\delta_1, \dots, \delta_4$. Par le point d'intersection de d_i et de δ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), on mène les deux autres tangentes à Γ_4 : les huit droites ainsi obtenues touchent une conique Σ_2 .

C'est le théorème proposé, si l'on suppose que Γ_4 se décompose en deux coniques, f et φ , et que I, J sont les points cycliques du plan : d_1 et d_2 , δ_1 et δ_2 seront les tangentes menées de I et J à f ; d_3 et d_4 , δ_3 et δ_4 joueront le même rôle pour φ . Alors les huit droites finales de l'énoncé précédent seront les tangentes menées à chacune des coniques par les foyers réels de l'autre.

Autres solutions, par l'AUTEUR, MM. R. BOUYAIST, J. LEMAIRE et PICARDAT.

2278.

(1915, p. 532.)

Une ellipse étant donnée par ses foyers F et F' et un point M, on élève en F une perpendiculaire à FM qui rencontre en α la normale en M; au point α on élève à la normale une perpendiculaire qui rencontre FM en β ; la parallèle à FF' menée par β passe par le centre de courbure de l'ellipse en M.

F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

Soient N le point commun à FF' et à la normale en M ⁽¹⁾, ω le point où la parallèle à FF' menée par β coupe la nor-

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

male, P le point de MF' qui se projette en N sur la normale : on sait que la perpendiculaire en P à MF' passe au centre de courbure; il suffit donc de prouver que $\overline{MP}^2 = MN \times M\omega$. Les triangles semblables à la figure donnent

$$\frac{MP}{MN} = \frac{M\alpha}{MF} = \frac{M\beta}{M\alpha},$$

d'où

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{MN}^2} = \frac{M\beta}{MF} = \frac{M\omega}{MN}$$

et, par suite,

$$\overline{MP}^2 = MN \times M\omega. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Autres solutions par MM. DE BEIRES, R. GOORMAGHTIGH et T. ONO.

AUTRE SOLUTION

Par M. PH. DU PLESSIS.

On sait, d'après Mannheim, M étant le milieu de AB, que le centre de courbure μ est le milieu de $\alpha\beta$. Or, il suffit de faire la figure ⁽¹⁾ pour qu'il saute aux yeux que chacune des constructions ci-dessus aboutit au milieu de $\alpha\beta$. En effet :

1° Si la parallèle à la tangente AB menée par α coupe PM en M' et PB en B', puisque M est le milieu de AB, M' est le milieu de $\alpha B'$; donc la parallèle à B'\beta menée par M' passe par le milieu μ de $\alpha\beta$.

2° Si la parallèle à PA menée par β coupe B\alpha en \gamma, le triangle \gamma\alpha\beta est isocèle comme \alpha AB; donc la parallèle à AB menée par \gamma, c'est-à-dire la hauteur, issue de \gamma, du triangle \gamma\alpha\beta passe par le milieu \mu de sa base.

3° La parallèle à \alpha\alpha menée par M passe par le milieu M'' de \alpha B. Donc la parallèle à B\alpha menée par M'' passe par M' et par \mu.

Autres solutions, par MM. R. GOORMAGHTIGH et T. ONO.

⁽¹⁾ On laisse ce soin au lecteur.

2279.

(1915, p. 512)

Soit OAB le triangle formé par deux diamètres conjugués d'une ellipse et la tangente en un point M à cette courbe. Élevons en A et B les perpendiculaires à la tangente et soient α et β les points où elles coupent respectivement les perpendiculaires abaissées de M sur OA et OB. Démontrer que la droite $\alpha\beta$ passe par le centre de courbure de l'ellipse en M et par le point de rencontre des hauteurs du triangle OAB.

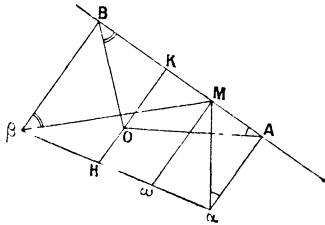
F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

Appelons ω le point où $\alpha\beta$ coupe la normale en M, il suffit de prouver que

$$M\omega = \frac{\overline{OM'}^2}{OM \cdot \sin \theta},$$



OM' désignant le demi-diamètre conjugué de OM , et θ l'angle $\widehat{MOM'}$; la figure donne

$$\frac{M\omega - A\alpha}{B\beta - M\omega} = \frac{MA}{MB},$$

d'où

$$M\omega = \frac{MA \cdot B\beta + MB \cdot A\alpha}{AB};$$

si OK est la distance de O à la tangente en M , les triangles semblables $MA\alpha$ et OKA , $MB\beta$ et OKB donnent

$$A\alpha = \frac{MA \cdot AK}{OK}, \quad B\beta = \frac{MB \cdot BK}{OK},$$

l'expression de $M\omega$ peut alors s'écrire

$$M\omega = \frac{MA \cdot MB}{AB \cdot OK} (BK + AK) = \frac{MA \cdot BM}{OK},$$

c'est bien la valeur du rayon de courbure, car

$$MA \cdot MB = \overline{OM'}^2 \quad \text{et} \quad OK = OM \sin \theta.$$

Si OK coupe $\alpha\beta$ en H , un calcul tout à fait analogue au précédent donne

$$KH = \frac{KA \cdot KB}{OK},$$

d'où il résulte que H est l'orthocentre du triangle OAB .

2280.

(1916, p. 9.)

Si l'on divise la suite naturelle des nombres impairs en groupes successifs de termes dont les nombres sont indiqués par les carrés des termes de la suite de Fibonacci, la demi-somme des termes extrêmes du $n^{\text{ème}}$ groupe est égal au terme de rang $2n$ de la suite de Fibonacci.

R. GOORMAGHTIGH.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Désignons par u_n le terme de rang n de la suite de Fibonacci. En utilisant les notations de M. Laisant [*Propriété de deux suites sommables* (*Nouvelles Annales*, 1915, p. 116-119)], on a

$$f(n) = 2n - 1, \quad F(n) = n^2, \\ \varphi(n) = u_n^2.$$

On a ensuite, d'après une propriété connue,

$$\Phi(n) = \varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n) = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = u_n u_{n+1}.$$

Par conséquent, la somme S_n du $n^{\text{ème}}$ groupe considéré est

$$F[\Phi(n)] - F[\Phi(n+1)] = u_n^2 u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 u_n^2, \\ u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 = u_{2n}.$$

Or, on sait que

$$u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 = u_{2n}.$$

On a donc

$$S_n = u_n^2 u_{2n}.$$

Puisque le groupe considéré est constitué par une progression arithmétique u_n^2 termes, la demi-somme des termes extrêmes de ce groupe vaut u_{2n} .

Autres solutions, par MM. F. CAHN et L. POLI.

2281.

(1916, p. 95.)

Soient A et B les points de contact des tangentes issues d'un point P à une conique Σ , les tangentes menées par A et B à une conique Σ' homofocale à Σ , touchent un cercle dont le rayon reste constant si P se déplace sur une conique homothétique et concentrique à Σ . En particulier, si A et B sont les extrémités de deux diamètres conjugués de Σ , le carré du rayon de ce cercle est égal à la différence des carrés des demi-axes de Σ et Σ' .

R. BOUVAIST.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Si l'équation tangentielle d'une conique est

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0,$$

l'équation quadratique des points A et B où elle est rencontrée par une droite de coordonnées u_0 et v_0 est

$$(a^2 u_0^2 + b^2 v_0^2 - 1)(a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1) - (a^2 u_0 u + b^2 v_0 v - 1)^2 = 0.$$

Si la droite est la polaire du point $P(x, \beta)$, cette équation s'écrit

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)(a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1) - (xu + \beta v - 1)^2 = 0.$$

L'équation d'une conique Σ' , homofocale à Σ , étant

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 - K(u^2 + v^2) = 0,$$

cette conique et les points A et B définissent un faisceau tangentiel. Pour qu'il y ait un cercle parmi les coniques du faisceau, il faut et il suffit qu'on ait, x_0, y_0 et R désignant les coordonnées du centre du cercle et son rayon,

$$\begin{aligned} \lambda \left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) (a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1) - (\alpha u + \beta v - 1)^2 \right] \\ + a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 - k(u^2 + v^2) \\ = \mu [R^2(u^2 + v^2) - (x_0 u + y_0 v - 1)^2]. \end{aligned}$$

En égalant les coefficients correspondants, on trouve d'abord

$$\lambda \alpha \beta = \mu x_0 y_0, \quad \lambda \alpha = \mu x_0, \quad \lambda \beta = \mu y_0;$$

d'où

$$\lambda = \mu, \quad \alpha = x_0, \quad \beta = y_0.$$

Le centre du cercle est donc le point P, pôle de AB; ce qu'il est facile de voir par la Géométrie.

En égalant ensuite les autres coefficients, on trouve

$$\lambda = \frac{-a^2 b^2}{b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2};$$

puis

$$\lambda [b^2 \alpha^2 + a^2 \beta^2 - b^2 (a^2 + R^2)] = -b^2 (a^2 - K),$$

$$\lambda [b^2 \alpha^2 + a^2 \beta^2 - a^2 (b^2 + R^2)] = -a^2 (b^2 - K);$$

d'où

$$R^2 = \frac{K(b^2 \alpha^2 + a^2 \beta^2 - a^2 b^2)}{a^2 b^2}.$$

Par suite, si le point P se déplace sur une conique homothétique et concentrique à Σ , R^2 reste constant. En particulier si A et B sont les extrémités de deux diamètres conjugués de Σ , on a

$$b^2 \alpha^2 + a^2 \beta^2 = 2a^2 b^2,$$

d'où

$$R^2 = K;$$

c'est-à-dire que R^2 est égal à la différence des carrés des demi-axes de Σ et Σ' .

Autres solutions, par MM. M. FAUCHEUX et L. POLI.

