V. THÉBAULT

Note sur les triangles isologiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 210-214

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__210_1>

[$K^1 5$]

NOTE SUR LES TRIANGLES ISOLOGIQUES;

PAR M. V. THÉBAULT.

D'une manière générale, deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$, situés dans un même plan, sont *isologiques* lorsque les obliques, menées respectivement de A, B, C à B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sous un même angle θ, *dans le même sens de rotation*, sont concourantes. Il en résulte d'ailleurs que les obliques menées de A_1, B_1, C_1 à BC, CA, AB, sous le même angle, *dans le sens opposé*, sont aussi concourantes.

Or, si l'on considère un triangle $A_1B_1C_1$ *aplati*, c'est-à-dire ayant ses sommets alignés sur une même droite Δ, la définition précédente est en général défectueuse quant à la deuxième partie. Les obliques menées de A, B, C sur B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sont concourantes (point de concours à l'infini), mais celles qui sont tracées de A_1, B_1, C_1, sur BC, CA, AB ne le sont pas nécessairement.

Il nous semble intéressant de rechercher dans quelles conditions deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$, dont le dernier est aplati, sont isologiques.

1. Soient un triangle ABC et une droite quel-

conque Δ de son plan contenant trois points A_1, B_1 et C_1. Les droites δ_1, δ_2, δ_3 issues respectivement de A, B, C et faisant avec Δ un même angle θ sont parallèles (point de concours à l'infini). Traçons deux droites $A_1\omega$ et $B_1\omega$ faisant respectivement avec BC et CA, dans le sens opposé de rotation, un même angle θ.

Une translation parallèle à Δ, suivant BB_1 par exemple, amène B_1 en B, A_1 en a_1, C_1 en c_1 sur une droite Δ_1, et ω en ω_1. La démonstration générale se déduira par une translation inverse qni mènera Δ_1 en Δ.

Par ω_1 traçons la droite $\omega_1 K$ faisant avec BA l'angle θ. Elle rencontre Δ_1 en K.

Désignons par α, β, γ les angles de la droite Δ respectivement avec les côtés BC, CA, AB. Les droites $B\omega_1$, $a_1\omega_1$, $K\omega_1$, étant antiparallèles par rapport aux angles A, B, C du triangle, forment entre elles les angles

$$A \text{ ou } 180^\circ - A, \quad B \text{ ou } 180^\circ - B, \quad C \text{ ou } 180^\circ - C.$$

Ces droites forment avec Δ des angles

$$\begin{gathered}(\theta - \alpha) \quad \text{ou} \quad 180^\circ - (\theta + \alpha),\\ (\theta - \beta) \quad \text{ou} \quad 180^\circ - (\theta + \beta),\\ (\theta - \gamma) \quad \text{ou} \quad 180^\circ - (\theta + \gamma).\end{gathered}$$

Dans les triangles $B\omega_1 a_1$ et $a_1\omega_1 K$, par exemple, on a donc

$$\frac{Ba_1}{a_1K} \times \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin(\theta \pm \beta)}{\sin(\theta \pm \gamma)};$$

d'où

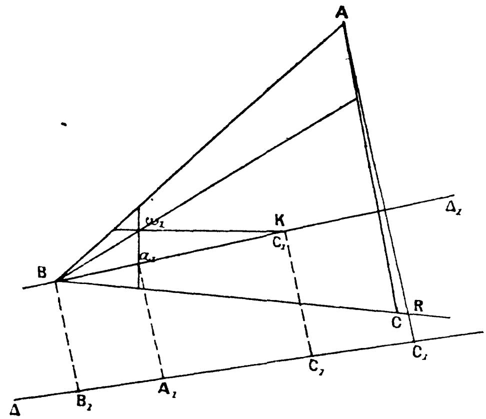
$$\frac{Ba_1}{a_1K} = \frac{AB}{AC} \times \frac{\sin(\theta \pm \beta)}{\sin(\theta \pm \gamma)}; \tag{1}$$

les signes + et — étant convenablement groupés.

Pour que la droite issue de C_1, *faisant avec* AB *l'angle* θ, *passe en* ω, *il faut et il suffit que* K *coïncide avec* C_1, *c'est-à-dire que la relation* (1) *soit vérifiée.*

Telle est la condition déterminant le triangle aplati $B_1A_1C_1$, B_1 et A_1 étant donnés. Deux relations analogues fixent A_1 et B_1, si l'on donne B_1 et C_1 ou A_1 et C_1.

2. Dans les *Nouvelles Annales* (¹), nous avons étudié le cas particulier de la figure où les droites qui



joignent les sommets des triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont parallèles. Il est aisé de constater que la relation (1) y est vérifiée, car

$$\frac{BA_1}{A_1C_1} = \frac{BR}{RC} = \frac{AB}{AC} \times \frac{\sin(\theta - \beta)}{\sin(\theta + \gamma)}.$$

(¹) *Généralisation d'un théorème de M. T. Lemoyne*, 1914, p. 218.

Enfin dans ce dernier cas, si $\theta = 90°$,

$$\frac{B_1A_1}{A_1C_1} = -\frac{AB}{AC} \times \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Ainsi se trouve établi et généralisé le théorème fondamental de M. Neuberg sur l'orthopôle :

Soient A′, B′, C′ *les projections des sommets du triangle* ABC *sur une droite quelconque* Δ *de son plan. Les perpendiculaires abaissées de* A′ *sur* BC, *de* B′ *sur* CA, *de* C′ *sur* AB *concourent en un même point* ω.

L'orthopôle ω de Δ par rapport au triangle ABC est donc l'un des centres orthologiques des triangles ABC et $A_1B_1C_1$, le second centre étant à l'infini.

3. Les propriétés de l'orthopôle, dans les cas particuliers de la droite Δ par rapport au triangle, sont parfois bien suggestives pour les élèves. Nous en avons proposé un certain nombre de ce genre dans le *Journal de Vuibert*, 1910, pages 7 et 76; dans l'*Éducation mathématique*, 1912, page 151.

Ainsi, si Δ se confond avec l'un des côtés du triangle, son orthopôle devient l'orthocentre du triangle. AA′, BB′, CC′ sont les hauteurs, lesquelles sont par conséquent concourantes.

Il est à remarquer que les hauteurs sont les seules droites, issues des sommets du triangle, qui soient concourantes tout en faisant avec les côtés un même angle, dans le même sens de rotation.

Cette propriété a permis à M. R. Marchay d'obtenir ce remarquable théorème qui semble par suite spécial aux triangles orthologiques (¹) :

(¹) *Journal de Vuibert*, 1916, p. 70.

Deux triangles ABC, $I_a I_b I_c$ *étant tracés dans un même plan, si par* A, B, C *on abaisse respectivement sur* $I_b I_c$, $I_c I_a$, $I_a I_b$ *les perpendiculaires* $I'_c I'_b$, $I'_a I'_c$, $I'_b I'_a$ *qui déterminent un triangle* $I'_a I'_b I'_c$; *et que de même on abaisse de* I_a, I_b, I_c *les perpendiculaires* B′C′, C′A′, A′B′ *sur* BC, CA, AB *qui déterminent le triangle* A′B′C′, *on a la relation*

$$(\text{aire ABC}) \times (\text{A}'\text{B}'\text{C}') = (\text{aire } I_a I_b I_c) \times (\text{aire } I'_a I'_b I'_c).$$