NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BRICARD

Sur les systèmes linéaires tangentiels de coniques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 201-210

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__201_0>

[L¹21]

SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES TANGENTIELS DE CONIQUES ;

PAR M. R. BRICARD.

1. Proposons-nous d'abord de chercher les cercles qui font partie d'un réseau tangentiel (système linéaire à deux paramètres) de coniques donné.

Soient

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(u, v, w) = {} & au^2 + a'v^2 + a''w^2 \\ & + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0 \end{aligned}$$

l'équation tangentielle d'une conique C et

$$(2)\quad F(x, y, 1) = Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2B'x + 2By + A'' = 0$$

son équation ponctuelle en coordonnées cartésiennes rectangulaires. On sait que les coefficients A, A', ... sont proportionnels aux mineurs correspondants du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}.$$

Pour que C soit un cercle, il faut qu'on ait

$$B'' = 0, \qquad A - A' = 0$$

ou

$$(3)\qquad bb' - a''b'' = 0,$$

$$(4)\qquad a'a'' - b^2 - aa'' + b'^2 = 0.$$

Supposons que C fasse partie d'un réseau tangentiel défini par l'équation

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0,$$

où

$$f_i = a_i u^2 + a'_i v^2 + \ldots.$$

On a

$$a = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3,$$
$$a' = a'_1 \lambda_1 + a'_2 \lambda_2 + a'_3 \lambda_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si l'on considère λ_1, λ_2 et λ_3 comme des coordonnées homogènes, les équations (3) et (4) représentent deux coniques qui se coupent généralement en quatre points. On en conclut qu'il existe en général quatre cercles dans un réseau tangentiel de coniques. On peut prévoir des cas où il y en aura une infinité.

2. Cherchons à déterminer, sous une forme aussi simple que possible, la relation qui existe entre ces quatre cercles. On pourrait poursuivre à cet effet l'étude du système (3), (4). Mais il vaut mieux procéder de la manière suivante :

Soient (A), (B), (C) trois cercles donnés, ayant pour centres les points A, B, C et dont les rayons sont R_a, R_b, R_c. Cherchons un quatrième cercle (D), de centre D et de rayon R_d, appartenant au réseau tangentiel défini par les trois premiers.

Pour n'aborder que le cas général, je supposerai que les points A, B, C ne sont pas en ligne droite [1].

Soient x_1, y_1 les coordonnées cartésiennes rectangulaires du point A. L'équation tangentielle du cercle A s'obtient immédiatement en écrivant que la distance

---

[1] Si les points A, B, C sont en ligne droite, on trouve une infinité de cercles (D), dont les centres D sont sur la droite ABC et qui sont bitangents à la conique bitangente aux cercles (A), (B), (C).

du point A à une tangente au cercle est égale à R_a, ce qui donne

$$A^2 - R_a^2 S = 0,$$

en posant

$$A = x_1 u + y_1 v + w, \qquad S = u^2 + v^2.$$

Les équations des cercles (B), (C), (D) ont des formes analogues.

Si les quatre cercles font partie d'un réseau tangentiel, on a l'identité

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\alpha(A^2 - R_a^2 S) + \beta(B^2 - R_b^2 S) \\ &\quad + \gamma(C^2 - R_c^2 S) + \delta(D^2 - R_d^2 S) = 0, \end{aligned}$$

α, β, γ, δ étant certains coefficients. Or cela peut s'écrire

$$\delta D^2 - (\alpha R_a^2 + \beta R_b^2 + \gamma R_c^2 + \delta R_d^2) S = -\alpha A^2 - \beta B^2 - \gamma C^2.$$

Le premier membre, égalé à zéro, donnerait l'équation tangentielle d'un cercle de centre D; le second membre, égalé à zéro, celle d'une conique conjuguée au triangle ABC. Par conséquent D est nécessairement le centre du cercle conjugué au triangle ABC, c'est-à-dire l'orthocentre de ce triangle. La relation entre les points A, B, C, D est symétrique. Disons, pour abréger, qu'ils forment un système *orthocentrique*.

Cherchons maintenant une relation entre les rayons R_a, R_b, R_c, R_d. A cet effet, remarquons que chacun des points A, B, C, D est le centre d'un cercle conjugué au triangle formé par les trois autres. Désignons par ρ_a, ρ_b, ρ_c, ρ_d les rayons des quatre cercles.

On a, entre les points A, B, C, D, la relation

$$(6) \qquad \frac{A^2}{\rho_a^2} + \frac{B^2}{\rho_b^2} + \frac{C^2}{\rho_c^2} + \frac{D^2}{\rho_d^2} - S = 0.$$

Elle peut en effet s'écrire, par exemple,

$$A^2 - \rho_a^2 S = -\frac{\rho_a^2}{\rho_b^2} B^2 - \frac{\rho_a^2}{\rho_c^2} C^2 - \frac{\rho_a^2}{\rho_d^2} D^2$$

et exprime bien que le cercle de centre A et de rayon ρ_a est conjugué par rapport au triangle BCD.

La relation (5) et la relation (6) doivent être identiques ([1]). On a donc

$$\alpha\rho_a^2 = \beta\rho_b^2 = \gamma\rho_c^2 = \delta\rho_d^2 = \alpha R_a^2 + \beta R_b^2 + \gamma R_c^2 + \delta R_d^2.$$

Si l'on désigne par K la valeur commune de ces quantités, il vient

$$\alpha = \frac{K}{\rho_a^2}, \qquad \beta = \frac{K}{\rho_b^2}, \qquad \ldots,$$

d'où

$$K = K\left(\frac{R_a^2}{\rho_a^2} + \frac{R_b^2}{\rho_b^2} + \frac{R_c^2}{\rho_c^2} + \frac{R_d^2}{\rho_d^2}\right),$$

et enfin

$$\frac{R_a^2}{\rho_a^2} + \frac{R_b^2}{\rho_b^2} + \frac{R_c^2}{\rho_c^2} + \frac{R_d^2}{\rho_d^2} = 1. \tag{7}$$

En résumé :

Il existe en général quatre cercles dans un réseau tangentiel de coniques. Leurs centres forment un système orthocentrique et leurs rayons R_a, R_b, R_c, R_d *satisfont à la relation* (7), ρ_a, ρ_b, ρ_c, ρ_d *désignant les rayons des cercles conjugués aux quatre triangles formés par les quatre points.*

On peut encore donner à la relation entre les quatre cercles une forme géométrique qui permet de construire

---

([1]) Si en effet ces deux relations étaient distinctes, on en conclurait, par l'élimination de S, que la conique réduite au point double D, par exemple, est conjuguée par rapport au triangle ABC, ce qui n'est pas vrai.

l'un d'eux, étant donnés les trois autres. Pour cela, remarquons d'abord qu'étant données quatre coniques (A), (B), (C), (D) appartenant à un même réseau tangentiel, leurs quatre cercles orthoptiques ont même centre radical. En effet il existe par hypothèse entre les premiers membres des équations tangentielles des coniques une relation

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0,$$

qui peut s'interpréter ainsi : il existe une conique (G) dont l'équation s'écrit indifféremment

$$\begin{aligned} \alpha A + \beta B &= 0, \\ \gamma C + \delta D &= 0, \end{aligned}$$

et qui appartient par conséquent à la fois au faisceau tangentiel déterminé par (A) et (B) et au faisceau tangentiel déterminé par (C) et (D).

En vertu d'un théorème classique, les cercles orthoptiques de (A), (B), (G) ont même axe radical; de même les cercles orthoptiques de (C), (D), (G). De là résulte la proposition énoncée.

Comme le cercle orthoptique d'un cercle de rayon R est le cercle concentrique de rayon $R\sqrt{2}$, on voit aisément comment, étant donnés les cercles (A), (B), (C), on construira le cercle (D) dont on connaît déjà le centre.

3. Études maintenant la correspondance entre les foyers des coniques du réseau tangentiel. On peut supposer celui-ci défini par les trois cercles (A), (B) et (C). L'équation générale des coniques est donc

$$(8) \quad \lambda(A^2 - R_a^2 S) + \mu(B^2 - R_b^2 S) + \nu(C^2 - R_c^2 S) = 0.$$

Soient P, Q, R les pieds des hauteurs du triangle

ABC (ce sont aussi les pieds des hauteurs des triangles BCD, CDA et DAB). Je dirai que le triangle PQR est le *triangle pédal* du système orthocentrique (A, B, C, D) et aussi du réseau tangentiel considéré. Le point A par exemple est le centre d'un cercle (A') tangent aux côtés du triangle PQR.

Soient A' le premier membre de l'équation tangentielle de ce cercle et r_a son rayon, de sorte qu'on a

$$A' = A^2 - r_a^2 S,$$

d'où

$$A^2 = A' + r_a^2 S.$$

Soient de même

$$B^2 = B' + r_b^2 S,$$
$$C^2 = C' + r_c^2 S.$$

L'équation (8) peut s'écrire

$$\lambda[A' + (r_a^2 - R_a^2)S] \\ + \mu[B' + (r_b^2 - R_b^2)S] + \nu[C' + (r_c^2 - R_c^2)S] = 0,$$

et l'on voit que la conique représentée par cette équation est homofocale à la conique

$$\lambda A' + \mu B' + \nu C' = 0. \tag{9}$$

Mais, comme A', B', C' sont trois coniques inscrites au triangle PQR, il en est de même de la conique (9). Ainsi :

Les coniques d'un réseau tangentiel sont homofocales aux coniques inscrites au triangle pédal du réseau.

Il en résulte que la correspondance entre les foyers des coniques d'un réseau tangentiel quelconque n'est pas plus générale que la correspondance entre des foyers des coniques inscrites dans un triangle; on sait que cette dernière correspondance consiste en ceci :

les deux foyers de l'une quelconque de ces coniques sont deux points inverses par rapport au triangle.

Énonçons encore la propriété particulière suivante, qui se déduit immédiatement des développements qui précédent : *les coniques conjuguées par rapport à un triangle sont homofocales aux coniques inscrites dans son triangle pédal.*

4. Abordons maintenant les systèmes linéaires tangentiels de coniques, à trois paramètres (je dirai plus brièvement : les S_3). Ils contiennent évidemment une infinité de cercles. Cherchons le lieu de leurs centres, en nous bornant à l'étude du cas général.

Soient

$$f_i = a_i u^2 + \ldots = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

les équations tangentielles de quatre coniques quelconques, et

$$f = au^2 + \ldots = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

l'équation d'une conique quelconque du S_3 qu'elles déterminent. Pour que f soit un cercle, on doit avoir, comme on l'a vu,

$$bb' - a'' b'' = 0, \tag{3}$$

$$a' a'' - b^2 - aa'' + b'^2 = 0. \tag{4}$$

L'équation tangentielle du centre de f est

$$f''_w = b' u + bv + a'' w = 0.$$

Ce centre a donc pour coordonnées cartésiennes

$$x = \frac{b'}{a''}, \qquad y = \frac{b}{a''};$$

d'où

$$b' = a'' x, \qquad b = a'' y.$$

Les équations (3) et (4) peuvent donc s'écrire

$$xy - \frac{b''}{a''} = 0,$$

$$\frac{a' - a}{a''} + x^2 - y^2 = 0.$$

D'autre part, a'', b'', $a' - a$, b' et b sont cinq fonctions linéaires et homogènes des quatre variables λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Il existe donc entre ces cinq quantités une relation linéaire et homogène, que l'on peut écrire

$$-(a' - a) + kb'' + lb' + mb + na'' = 0,$$

k, l, m, n étant des constantes, ou

$$-\frac{a' - a}{a''} + k\frac{b''}{a''} + l\frac{b'}{a''} + m\frac{b}{a''} + n = 0,$$

ou enfin, d'après les relations précédemment écrites,

$$x^2 - y^2 + kxy + lx + my + n = 0,$$

ce qui représente une hyperbole équilatère. Ainsi :

Le lieu des centres des cercles d'un S_3 *est une hyperbole équilatère* H.

Si (A), (B), (C) sont trois quelconques de ces cercles, de centres A, B, C, ils déterminent un réseau tangentiel qui contient un quatrième cercle (D) dont le centre D est l'orthocentre de ABC. Ce centre appartient bien à H, ce qui concorde avec le fait que le réseau considéré fait partie du S_3.

5. Il existe dans le S_3 une infinité de coniques ayant un foyer donné. Quel est le lieu du second foyer F' (je veux dire du second foyer réel, si F est réel, du second foyer imaginaire, si F est imaginaire)? Les coniques considérées sont assujetties à quatre conditions

tangentielles linéaires, deux par le fait qu'elles sont au S_3, deux par le fait qu'elles touchent les isotropes issues de F. Elles forment donc un faisceau tangentiel et touchent, outre ces isotropes, deux droites MX et MY. D'après le théorème de Poncelet, MF et MF′ sont également inclinées sur MX et MY. MF′ est donc une droite fixe, et c'est le lieu demandé.

Ce résultat se précise par la considération de l'hyperbole H.

Soient F et F′ les deux foyers d'une conique quelconque C du S_3. Soient A_1 et A_2 les deux points où FF′ rencontre H. Il existe deux cercles (A_1), (A_2) de centres A_1 et A_2, appartenant au S_3.

Considérons le faisceau tangentiel déterminé par ces deux cercles. Il contient une seule conique ayant son foyer en F, et cette conique, faisant partie du S_3, se confond nécessairement avec C. Son second foyer F′ est le conjugué harmonique de F par rapport à A_1A_2 [car les foyers des coniques du faisceau tangentiel défini par (A_1) et (A_2) forment sur A_1A_2 une involution dont A_1 et A_2 sont les points doubles]. F′ appartient donc à la polaire de F par rapport à H. Ainsi :

Le lieu des seconds foyers F′ *des coniques du* S_3 *qui ont un foyer donné* F *est la polaire de ce point par rapport à* H.

Observons que A_1, A_2, A_3 étant trois points quelconques de H, celle des coniques du réseau tangentiel défini par les cercles (A_1), (A_2), (A_3) qui a son foyer en F est l'une des coniques considérées. Or on a vu au n° 3 que le second foyer F′ de cette conique est l'inverse de F par rapport au triangle pédal de $A_1A_2A_3$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

A_1, A_2, A_3 *étant trois points quelconques d'une* *hyperbole équilatère* H *et* F *étant un point quelconque de son plan, l'inverse de* F *par rapport au triangle pédal de* $A_1 A_2 A_3$ *appartient à la polaire de* F *par rapport à* H.