

HENRI LEBESGUE

Sur deux théorèmes de Mannheim et de M. Bricard concernant les lignes de courbure et les lignes géodésiques des quadriques

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 18 (1918), p. 1-18

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__1_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

[L²11, 12]

**SUR DEUX THÉORÈMES DE MANNHEIM ET DE M. BRICARD
CONCERNANT LES LIGNES DE COURBURE ET LES
LIGNES GÉODÉSIQUES DES QUADRIQUES;**

PAR M. HENRI LEBESGUE.

Je commencerai par donner la solution de la question 1657 (1893, p. 53) proposée par Mannheim. Cette question conduit tout naturellement à étudier les rapports entre la surface des ondes et une certaine famille de quadriques homofocales et à retrouver, par la voie même qui y conduisit leur auteur, des théorèmes dus à Mannheim.

Le plus intéressant est une propriété des lignes de courbure des quadriques. M. Bricard a prouvé récemment (*Nouvelles Annales*, janvier 1908) que cette propriété est commune aux lignes de courbure et aux lignes géodésiques et qu'elle constitue par suite une interprétation nouvelle de la relation de Joachimsthal. J'aurai l'occasion de donner dans la deuxième Partie des démonstrations immédiates de ces propriétés.

Ann. de Mathémat., 4^e série, t. XVIII. (Janv. 1918.) 1

I.

1. Voici l'énoncé de la question 1657.

On projette orthogonalement un ellipsoïde sur tous ses plans tangents. Déterminer :

1° *L'équation de la surface qui limite la région occupée par toutes les ellipses de contour apparent ainsi obtenues;*

2° *Le nombre des points de contact de cette surface et de l'une de ces ellipses (1).*

Les plans tangents à l'ellipsoïde dépendent de deux paramètres ; dans chacun d'eux nous avons une ellipse contour apparent, en projection orthogonale, de l'ellipsoïde donné. Donc une congruence d'ellipses. Par chaque point P de l'espace passent plusieurs de ces ellipses. On demande d'abord quelle est la région où doit se trouver P pour que l'une au moins de ces ellipses soit réelle. Cette région est évidemment limitée par certaines nappes de la surface focale de la congruence et chaque ellipse étant tangente en plusieurs points à cette surface focale, la deuxième question de l'énoncé est toute naturelle.

2. Soit P un point de l'espace. Pour qu'une conique de la congruence passe par P, il faut et il suffit que le plan Π de cette conique soit tangent à l'ellipsoïde E donné et que la perpendiculaire PA à Π en P soit aussi tangente à E. Donc PA doit être commun au cône

(1) Je copie cet énoncé dans le numéro de juillet 1916 en rectifiant une coquille évidente. On avait imprimé « l'axe de ces ellipses » au lieu de « l'une de ces ellipses ».

circonscrit à E de sommet P et à son cône supplémentaire. Il est un plan tangent commun à ces deux cônes. Par chaque point de l'espace il passe donc quatre coniques de la congruence. Étudions la réalité de ces coniques.

Coupons un cône par un de ses plans principaux contenant deux génératrices réelles; l'angle de ces deux génératrices (angle principal) est le supplément de l'angle analogue du cône supplémentaire. Donc pour qu'il y ait des génératrices communes à un cône et à son supplémentaire il faut et il suffit que les deux angles principaux de ce cône soient l'un aigu, l'autre obtus. Sans quoi l'un des deux cônes serait intérieur à l'autre.

Ceci étant, prenons le point P tout près de l'ellipsoïde et extérieur à lui. Le cône circonscrit de sommet P a ses deux angles principaux obtus; il n'y a pas d'ellipse réelle passant par P .

Prenons P un peu plus loin de E ; le cône aura un angle principal aigu et l'autre obtus; il y a ura quatre ellipses réelles passant par P .

Prenons P plus loin encore; le cône circonscrit aura des angles principaux aigus, les quatre ellipses passant par P seront imaginaires.

De cet aperçu, il résulte que la région demandée est limitée par tout ou partie de la surface Σ lieu des sommets des cônes circonscrits à E et dont un angle principal est droit; que Σ comprend au moins deux nappes réelles: l'une, la plus proche de E , est le lieu des sommets pour lesquels le second angle principal est obtus; l'autre, la plus éloignée de E , est le lieu des sommets pour lesquels le second angle principal est aigu. Ces deux nappes auront pour points communs les sommets des cônes de révolution circonscrits à E et

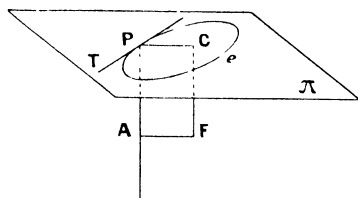
(4)

dont l'angle principal est droit. Ces points, qui sont les points de rencontre de Σ et des focales de E , seront donc des points singuliers de Σ .

Si l'on tient à remplacer cet aperçu par un raisonnement plus serré on pourra remarquer que le nombre de plans Π réels, issus de P , ne peut changer, quand P varie, que si deux de ses plans sont réels et confondus. Or cela n'arrive que si le cône circonscrit à E de sommet P est tangent à son cône supplémentaire suivant une génératrice réelle; donc ces deux cônes sont bitangents, ce qui exige qu'ils aient un angle principal droit.

3. Avant de former l'équation de Σ , je traite la seconde partie. Soient Π un plan tangent à E en un point C , P un point de l'ellipse e de la congruence qui est située dans Π , PA la tangente à E perpendiculaire à Π et issue de P (*fig. 1*). Pour que P appartienne

Fig. 1.



à Σ , il faut que PA et PC , qui sont deux génératrices communes au cône circonscrit de sommet P et à son supplémentaire, soient des génératrices principales de ces cônes. Donc que PAC soit un plan principal du cône. Or si TP est la tangente à e en P , ATP est le plan tangent aux deux cônes suivant PA . Donc PAC et ATP doivent être rectangulaires, c'est-à-dire que

CP et TP doivent être orthogonales. On vérifiera facilement la réciproque.

Concluons : l'ellipse e de la congruence touche la surface focale Σ en quatre points réels ou imaginaires qui sont les pieds des normales abaissées sur e du point de contact c du plan de e et de l'ellipsoïde.

4. Soit

$$S_1 x^2 + S_2 y^2 + S_3 z^2 = 0$$

l'équation d'un cône ; il aura un angle principal droit si, et seulement si, deux racines de l'équation en S sont égales et de signes contraires. D'avec les notations ordinaires l'équation en S est

$$\begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & A \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = \delta - \theta_1 S + \theta S^2 - S^3 = 0$$

avec

$$\begin{aligned} \theta &= A + A' + A'', & \theta_1 &= \sum A'A'' - B^2 = \Sigma a, \\ \delta &= \sum A a + 2BB'B'' - 2AA'A''. \end{aligned}$$

Si l'équation en S a deux racines non nulles, égales et de signes contraires, la somme θ des racines est la troisième solution en S et inversement. Donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'un cône ait un angle principal droit est

$$\theta\theta_1 - \delta = 0.$$

Ceci s'écrit encore

$$\sum A(a' + a'') - 2BB'B'' + 2AA'A'' = 0 \quad (1).$$

(1) Si la quadrique n'était pas un cône, cette condition exprimerait que l'une des sections principales est une hyperbole équilatère.

(6)

5. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de P. Le cône circonscrit à l'ellipse

$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

et de sommet P a pour équation

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) \\ \times \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 \right) - \left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} \right)^2 = 0.$$

Donc on a, en supprimant les indices,

$$A = \frac{E}{a^2} - \frac{x^2}{a^4} = \frac{1}{a^2} \left(E - \frac{x^2}{a^2} \right) = \frac{1}{a^2} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right);$$

$$B = - \frac{xy}{a^2 b^2};$$

$$a = \frac{1}{b^2 c^2} \left(E - \frac{y^2}{b^2} \right) \left(E - \frac{z^2}{c^2} \right) - \frac{y^2 z^2}{b^4 c^4} \\ = \frac{E}{b^2 c^2} \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right);$$

$$a' + a'' = \frac{E}{x^2 b^2 c^2} [y^2 + z^2 - b^2 - c^2].$$

Nous aurons l'équation de Σ en écrivant que le cône considéré satisfait à la condition du numéro précédent ; il vient :

$$\frac{E}{a^2 b^2 c^2} \sum \frac{1}{a^2} \left(E - \frac{x^2}{a^2} \right) (y^2 + z^2 - b^2 - c^2) \\ + 2 \frac{x^2 y^2 z^2}{a^4 b^4 c^4} + \frac{2}{a^2 b^2 c^2} \left(E - \frac{x^2}{a^2} \right) \left(E - \frac{y^2}{b^2} \right) \left(E - \frac{z^2}{c^2} \right) = 0.$$

Cette équation est divisible par E, comme on le voit en développant le dernier terme qui s'écrit

$$\frac{2}{a^2 b^2 c^2} \left\{ E^2 \left[E - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \right] + E \sum \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} - \frac{x^2 y^2 z^2}{a^2 b^2 c^2} \right\}.$$

D'où l'équation de Σ :

$$\sum \frac{1}{2a^2} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) (y^2 + z^2 - b^2 - c^2) + \sum \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} - E = 0.$$

On voit que Σ est du quatrième degré ; donc Σ ne peut contenir que les deux nappes dont nous avons prévu l'existence et nous avons trouvé tous les points communs à Σ et à une ellipse e de la congruence.

Pour reconnaître la nature de Σ , il nous suffit de savoir qu'elle est du quatrième degré. Σ , étant le lieu des sommets des cônes circonscrits à E dont un angle principal est droit, contient évidemment les cercles orthoptiques des sections principales de E . Et, puisque Σ est du quatrième degré, le plan principal $y = 0$, par exemple, coupe Σ suivant la circonférence de rayon $\sqrt{a^2 + c^2}$ plus une conique dont les deux demi-axes sont les rayons $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{b^2 + c^2}$ des deux autres circonférences orthoptiques principales.

Si donc on dispose des trois paramètres dont dépend la surface des ondes la plus générale, ayant mêmes axes que E , de façon à la faire passer par les trois circonférences orthoptiques principales, cette surface des ondes passera aussi par les ellipses qui complètent les sections de Σ par les plans principaux.

La surface des ondes et Σ seront même tangentes tout le long de ces trois circonférences et de ces trois ellipses. Donc elles coïncideront, puisqu'elles seront tangentes tout le long d'une courbe du 12^e degré.

La surface Σ est donc une surface des ondes. Ses points doubles réels sont dans le plan $y = 0$, à l'intersection de la circonférence et de l'ellipse sections de Σ par ce plan.

Je laisse au lecteur le soin de transformer l'équation

de Σ de façon à la ramener à l'une des formes classiques de l'équation de la surface des ondes.

6. Mannheim déduit la nature de Σ d'un résultat de Painvin. Celui-ci a étudié le complexe des droites D d'où l'on peut mener deux plans tangents rectangulaires à un ellipsoïde E . Si P est un point quelconque, le cône du complexe de sommet P est évidemment le cône \mathcal{C}_1 du second degré lieu des droites issues de P par lesquelles on peut mener deux plans tangents rectangulaires au cône \mathcal{C} circonscrit à E et de sommet P . La surface du complexe est le lieu des points P pour lesquels \mathcal{C}_1 est décomposable. Or si \mathcal{C}_1 est décomposable, il passe par l'un de ses axes, c'est-à-dire par l'un des axes de \mathcal{C} . Donc par cet axe on peut mener deux plans tangents rectangulaires à \mathcal{C} et l'angle principal de \mathcal{C} , situé dans le plan perpendiculaire à l'axe considéré, est un angle droit. La surface du complexe de Painvin est donc notre surface Σ . Or, on démontre que cette surface du complexe est une surface des ondes (1).

7. La question posée par Mannheim est entièrement traitée (2), mais il est naturel de se demander quelles sont les courbes Γ enveloppes des ellipses de la congruence.

Les courbes Γ sont tracées sur Σ ; elles sont données

(1) Ce résultat de Painvin est reproduit dans la géométrie analytique de Pruvost.

(2) Sa solution est implicitement contenue dans un Mémoire de Mannheim des *Proceedings of the royal Society* (1881). Ce Mémoire, reproduit à peu près textuellement dans les *Leçons et développement de Géométrie cinématique*, contient les résultats que nous allons démontrer maintenant par les méthodes mêmes de Mannheim.

par une équation différentielle du premier ordre qui exprime que celle de ces courbes qui passe par le point P (n° 3, *fig.* 1) est tangente à la droite PT. Or PT, étant perpendiculaire au plan principal APC du cône \mathcal{C} de sommet P et circonscrit à E, est un axe principal de ce cône, donc est tangent à deux des quadriques homofocales à E qui passent par P.

Ces deux quadriques coupent Σ suivant deux courbes Γ_1 et Γ_2 passant par P et qui sont donc aussi solutions de l'équation différentielle donnant les courbes Γ , donc en réalité Γ_1 et Γ_2 coïncident avec l'enveloppe Γ passant par P.

Et comme la quadrique homofocale à E contenant Γ varie avec Γ , puisque Σ n'est pas une quadrique, on peut dire que Σ coupe toute quadrique Q homofocale à E suivant une ligne de courbure Γ de Q. Le reste de l'intersection est une courbe Λ du quatrième degré.

Soit Q_1 la quadrique homofocale à E et normale en P à PT. La partie de son intersection avec Σ qui passe par P, n'étant pas tangente à PT, est une courbe Λ . Or, on voit qu'en P, Q_1 et Σ sont orthogonales ainsi que Λ et Γ , et, puisque P est quelconque : *Les courbes Λ sont les trajectoires orthogonales des courbes Γ . La quadrique homofocale à E qui contient une courbe Λ est coupée orthogonalement par Σ tout le long de cette courbe Λ .*

On sait que, quand un plan se déplace, les plans normaux aux trajectoires des différents points de ce plan passent par un point fixe F de ce plan. Ceci posé, supposons que le point P se déplace sur Σ en entraînant l'angle droit APC qui est bien déterminé pour chaque position de P. Le point F est alors évidemment le quatrième sommet d'un rectangle APCF, ce qui le

détermine, (*fig. 1*). FP étant une normale à la trajectoire de P, quel que soit le déplacement de P sur Σ , FP est la normale à Σ .

Le plan normal à Λ en P est donc le plan TPF. Mais, si l'on considère le contour apparent de E sur le plan APC, c'est une ellipse tangente à PA' et PC en A et C; donc une ellipse dont le centre est sur PF. C'est dire que le plan TPF passe par le centre O de E, et comme ce plan est normal à Λ , Λ est une courbe sphérique tracée sur une sphère de centre O.

Le lecteur verra de suite que tous les raisonnements de ce numéro, sauf le dernier, s'appliquent également au cas plus général de la surface Σ' lieu des sommets des cônes circonscrits à E et dont un angle principal est donné.

8. Après les résultats du numéro précédent, il apparaît clairement qu'on aurait eu avantage à remplacer les calculs des nos 4 et 5 par des calculs en coordonnées elliptiques. C'est ce que je vais faire rapidement.

Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les paramètres des trois quadriques homofocales à E et passant par P (x, y, z) et soit s_3 la racine de l'équation en S du cône circonscrit de sommet P qui fournit le plan principal tangent à la quadrique ρ_3 , on a

$$\begin{aligned} S \frac{X^2}{a^2} E - \left(S \frac{Xx}{a^2} \right)^2 - s_3(x^2 + y^2 + z^2) \\ \equiv M \left(S \frac{Xx}{a^2 - \rho_1} \right)^2 + N \left(S \frac{Xx}{a^2 - \rho_2} \right)^2. \end{aligned}$$

Ceci donne

$$(1) \quad \frac{E}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} - s_3 = M \frac{x^2}{(a^2 - \rho_1)^2} + N \frac{x^2}{(a^2 - \rho_2)^2},$$

$$(2) \quad - \frac{xy}{a^2 b^2} = M \frac{xy}{(a^2 - \rho_1)(b^2 - \rho_1)} + N \frac{xy}{(a^2 - \rho_2)(b^2 - \rho_2)},$$

et des relations analogues. En posant

$$M = \frac{(a^2 - \rho_1)(b^2 - \rho_1)(c^2 - \rho_1)}{a^2 b^2 c^2} m,$$

$$N = \frac{(a^2 - \rho_2)(b^2 - \rho_2)(c^2 - \rho_2)}{a^2 b^2 c^2} n,$$

l'équation (2) devient

$$m(c^2 - \rho_1) + n(c^2 - \rho_2) + c^2 = 0.$$

Or, on a le droit de remplacer c^2 par a^2 et b^2 , d'où

$$\begin{aligned} m + n + 1 &= 0, & m\rho_1 + n\rho_2 &= 0, \\ M &= \frac{(a^2 - \rho_1)(b^2 - \rho_1)(c^2 - \rho_1)}{a^2 b^2 c^2} \frac{\rho_2}{\rho_1 - \rho_2}, \\ N &= \frac{(a^2 - \rho_2)(b^2 - \rho_2)(c^2 - \rho_2)}{a^2 b^2 c^2} \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}. \end{aligned}$$

Ces valeurs portées dans (1) donnent, par un calcul facile quoique un peu long,

$$s_3 = - \frac{\rho_1 \rho_2}{a^2 b^2 c^2}.$$

L'équation réduite du cône est donc (1)

$$\frac{X_1^2}{\rho_1} + \frac{X_2^2}{\rho_2} + \frac{X_3^2}{\rho_3} = 0.$$

Ses angles principaux sont donnés par des relations telles que

$$(3) \quad \rho_1 \sin^2 \frac{\alpha_3}{2} + \rho_2 \cos^2 \frac{\alpha_3}{2} = 0.$$

L'équation d'une surface Σ' s'obtiendra donc en faisant $\rho_2 = k\rho_1$, dans l'expression générale des coor-

(1) On trouvera dans les ouvrages classiques des artifices donnant assez rapidement ce résultat. Voir aussi un article de M. F. Egan (*N. A.*, mars 1909).

données en fonction de ρ_1, ρ_2, ρ_3 et en particulier on a, pour la surface Σ , $\rho_1 + \rho_2 = 0$, d'où, en posant $\rho_3 = u$, $\rho_1^2 = v$,

$$x^2 = \frac{(a^2 - u)(a^4 - v)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)},$$

$$y^2 = \frac{(b^2 - u)(b^4 - v)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2 - u)(c^4 - v)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}.$$

Ces expressions paramétriques des points de la surface des ondes, qui sont antérieures au Mémoire de Mannheim, fournissent immédiatement les résultats des numéros précédents. Ces formules sont dues à W. Roberts et Massieu.

II.

9. Comme on l'a vu, l'étude des surfaces Σ et Σ' a conduit indirectement Mannheim à un résultat, qui découle immédiatement de la formule (3), et qu'on peut énoncer ainsi :

Si, par une tangente variable à une ligne de courbure d'une quadrique Q, on mène des plans tangents à une quadrique homofocale E, le dièdre ainsi obtenu est de grandeur constante.

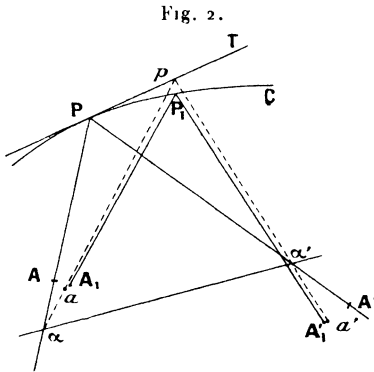
Le plan tangent à Q, au point de contact de la tangente considéré, étant toujours bissecteur du dièdre des plans tangents, on peut donner à l'énoncé cette nouvelle forme :

Si, par une tangente variable à une ligne de courbure d'une quadrique Q, on mène des plans tangents à diverses quadriques homofocales à Q, le faisceau de plans ainsi obtenu est de grandeur constante.

Cette proposition est presque immédiate ; montrons en effet que :

Si les plans menés par une tangente variable PT d'une courbe C , tangentielllement à deux surfaces F et F' , ont leurs points de contact A et A' constamment contenus dans le plan normal en P à la courbe C , l'angle de ces deux plans est constant.

En effet (*fig. 2*), soit P_1 un point de C voisin de P et soient A_1, A'_1 les points de contact des plans menés par la tangente en P_1 . Prenons PP_1 pour infiniment



petit principal ; à des infiniment petits d'ordre supérieur près on peut remplacer P_1 par un point p de la tangente PT , A_1 et A'_1 par des points a et a' des plans TPA, TPA' et par suite remplacer l'angle $A_1 P_1 A'_1$ par apa' . Soient α et α' les points de rencontre de PA et pa , de PA' et pa' . On passe de APA' à apa' en coupant le dièdre (TPA, TPA') par un plan tournant autour de $\alpha\alpha'$ et prenant successivement les deux positions APA', apa' . L'angle de ces deux positions est un infiniment petit au moins du premier ordre, et comme

l'angle de section du dièdre passe par un maximum ou un minimum pour la position APA' du plan sécant, la différence entre les deux angles sections APA' , apa' est au moins du second ordre. Donc la différence entre APA' et $A_1P_1A'_1$ est rigoureusement nulle.

La proposition est donc démontrée; or, on obtient le théorème de Mannheim en prenant pour C une ligne de courbure d'une quadrique Q et pour F et F' deux surfaces homofocales à Q , distinctes ou non.

10. L'énoncé auxiliaire que nous venons de légitimer est bien plus immédiat encore si l'on fait appel au théorème de Joachimsthal sur les développées des courbes gauches. En effet, les deux plans TPA , TPA' enveloppent, quand P varie, deux développables. Les génératrices de contact sont PA et PA' ; donc ces droites, qui sont normales à C , enveloppent deux développées de C et par suite leur angle APA' est constant.

Le raisonnement de géométrie infinitésimale fait au numéro précédent doit donc permettre aussi de démontrer le théorème de Joachimsthal.

En effet, soient C une courbe gauche, PA et PA' deux normales à cette courbe au point P . Soit xx' la droite caractéristique du plan normal APA' . Si PA fait partie d'une famille de normales ayant une enveloppe, α sera son point de contact et la normale voisine sera assimilable à $p\alpha$. De même pour PA' . Or, supposons que PA fasse partie d'une famille ayant une enveloppe, il en sera de même de PA' si, et seulement si, la normale voisine de PA' est assimilable à $p\alpha'$; donc si, et seulement si, l'angle APA' reste constant quand P varie.

11. M. Bricard a montré que les deux énoncés

donnés au commencement du n° 9 restaient exacts si les plans tangents, au lieu d'être menés par une tangente d'une ligne de courbure d'une quadrique Q , étaient menés par une droite tangente à deux quadriques Q, Q' d'une famille de quadriques homofocales. En particulier la droite peut donc rester tangente à une ligne géodésique d'une quadrique Q . D'ailleurs il suffit de légitimer l'énoncé de M. Bricard pour ce cas particulier, car on passe d'une tangente commune à Q et Q' à une autre tangente commune à ces deux quadriques en déplaçant la première droite d'abord tangentielllement à une géodésique de Q , ce qui la laisse tangente à Q' , puis tangentielllement à une géodésique de Q' .

Nous nous proposerons donc seulement de démontrer que l'énoncé du début du n° 9 subsiste si l'on y remplace les mots « ligne de courbure » par « ligne géodésique ». Nous allons d'ailleurs légitimer à la fois ces deux énoncés.

Soit C une courbe tracée sur une quadrique Q , par les tangentes à cette courbe nous menons des plans tangents à une quadrique homofocale E . Soient P un point de C , PT sa tangente et \ominus le cône circonscrit à E et de sommet P . Soit P_1 un point de C voisin de P , la tangente à C en P_1 peut être assimilée à sa parallèle P_1t menée par P , à des infiniment petits négligeables près. Il suffit donc d'apercevoir des cas dans lesquels les plans tangents à \ominus menés par PT et par P_1t font des angles dont la différence est d'ordre supérieur en premier pour avoir les courbes C auxquelles s'applique l'énoncé du début du n° 9.

1° PT est un axe du cône \ominus . Si l'on fait varier une droite PX dans le plan PTt , l'angle des plans tangents

à \mathcal{C} menés par PX passe par un maximum ou un minimum quand PX vient en PT, par raison de symétrie. Donc cet angle ne varie que d'un infiniment petit d'ordre négligeable quand on passe de PT à Pt. L'énoncé de Mannheim est justifié.

2° Le plan PTt est normal au plan principal du cône \mathcal{C} qui est tangent à Q. Si l'on prend une droite PX dans le plan PTt, l'angle des plans tangents à \mathcal{C} passe encore par un maximum ou un minimum quand PX vient en PT, par raison de symétrie. L'énoncé de M. Bricard est justifié.

12. Le raisonnement qui conduisit M. Bricard à son théorème est tout à fait différent. En imitant ce raisonnement nous obtiendrons une nouvelle forme de l'énoncé à un certain égard plus générale.

Soit une famille de quadriques homofocales. Soient $P_1, P'_1; P_2, P'_2; P_3, P'_3$ des plans menés respectivement par deux droites D et D' tangentielle-ment aux quadriques Q_1, Q_2, Q_3 de la famille. Si la figure P_1, P_2, P_3 est égale à la figure P'_1, P'_2, P'_3 , le faisceau des plans tangents menés par D aux quadriques de la famille est égal au faisceau analogue formé par les plans issus de D'. Les droites D et D' sont tangentes aux deux mêmes quadriques du faisceau.

Soient

$$P_1 + \lambda P_2 = 0 \quad \text{et} \quad P'_1 + \mu P'_2 = 0$$

les équations des plans menés par D et D'. On peut supposer que pour $\lambda = \mu$ les deux plans correspondants de ces deux faisceaux sont ceux qui viendraient en coïncidence si l'on transportait P_1 sur P'_1 et P_2 sur P'_2 .

Soit

$$Q_1 + \rho Q_2 = 0$$

l'équation tangentielle des quadriques du faisceau considéré. La condition de tangence entre un plan $P_1 + \lambda P_2$ et une quadrique $Q_1 + \rho Q_2$ est évidemment du premier degré en ρ et du second en λ . Soit

$$A(\lambda)\rho + B(\lambda) = 0.$$

On obtient de même une condition de tangence de $P'_1 + \mu P'_2$ avec $Q_1 + \rho Q_2$, soit

$$C(\mu)\rho + D(\mu) = 0;$$

d'où la relation entre λ et μ

$$A(\lambda)D(\mu) - B(\lambda)C(\mu) = 0$$

qui est du second degré en λ et en μ .

Faisons-y $\lambda = \mu$. Nous avons une équation du quatrième degré au plus. Or, nous en connaissons cinq solutions ; les λ des plans P_1, P_2, P_3 et des deux plans isotropes passant par D , puisque l'ombilicale est une quadrique du faisceau. Donc la relation entre λ et μ est divisible par $\lambda - \mu$; elle s'écrit :

$$(\lambda - \mu)[a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d] = 0.$$

La présence du facteur $\lambda - \mu$ montre que deux plans correspondants des faisceaux D et D' sont tangents à la même quadrique. Ceci suffit à légitimer la première partie de l'énoncé. Quant à la seconde : si D est tangente à Q , les deux plans tangents à Q issus de D sont confondus ; or, les plans tangents à Q issus de D' correspondent à ceux-là, donc ils sont aussi confondus. D et D' sont donc tangentes aux mêmes quadriques du faisceau.

La relation homographique entre λ et μ qu'on obtient en égalant à zéro le second facteur est donc la relation qui lie les paramètres des deux plans (issus de D ou de D' , peu importe) tangents à une même quadrique; c'est une relation involutive. Mais, dans cette correspondance, les deux plans isotropes issus de D se correspondent, donc les plans doubles sont rectangulaires et l'on retrouve ainsi ce fait bien connu que les deux plans, passant par D et tangents aux deux quadriques homofocales tangentes à D , sont rectangulaires.