

AURIC

**Contribution à la résolution géométrique  
de l'équation du troisième degré**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 18  
(1918), p. 186-195

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1918\\_4\\_18\\_\\_186\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__186_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

---

---

[B 12a] [L'1c]

**CONTRIBUTION A LA RÉSOLUTION GÉOMÉTRIQUE  
DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;**

PAR M. AURIC.

---

Considérons l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

dont les racines sont représentées par les vecteurs

$$a_1 = \overline{GA_1}, \quad a_2 = \overline{GA_2}, \quad a_3 = \overline{GA_3}.$$

En posant

$$x = \overline{GX},$$

on aura identiquement

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x^3 + px + q = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \\ &= \varphi(\overline{GX}) = \overline{A_1X} \cdot \overline{A_2X} \cdot \overline{A_3X} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= \Sigma \overline{GA_1} = 0, & \Sigma a_1 a_2 &= \Sigma \overline{GA_1} \cdot \overline{GA_2} = p, \\ a_1 a_2 a_3 &= \overline{GA_1} \cdot \overline{GA_2} \cdot \overline{GA_3} = -q. \end{aligned}$$

La première de ces relations montre que G est le barycentre de  $A_1 A_2 A_3$ ; on tire des deux autres

$$\frac{1}{\overline{GA_1}} + \frac{1}{\overline{GA_2}} + \frac{1}{\overline{GA_3}} = -\frac{p}{q}.$$

Si, dans l'équation dérivée

$$\varphi'(x) = 3x^2 + p = 0,$$

nous posons  $p = -3f^2$ , les racines seront

$$\overline{GF} = +f, \quad \overline{GF'} = -f,$$

et il est clair que G est au milieu de FF'.

On a

$$\varphi'(x) = 3(x + f)(x - f) = \varphi'(\overline{GX}) = 3\overline{FX} \cdot \overline{F'X}.$$

On connaît la formule

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{3(x^2 - f^2)}{x^3 + px + q} = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \frac{1}{x - a_3},$$

d'où

$$\frac{3\overline{FX} \cdot \overline{F'X}}{\overline{A_1X} \cdot \overline{A_2X} \cdot \overline{A_3X}} = \frac{1}{\overline{A_1X}} + \frac{1}{\overline{A_2X}} + \frac{1}{\overline{A_3X}}.$$

Lorsque X vient en F ou en F', on a

$$\frac{1}{A_1 F} + \frac{1}{A_2 F} + \frac{1}{A_3 F} = \frac{1}{A_1 F'} + \frac{1}{A_2 F'} + \frac{1}{A_3 F'} = 0,$$

ce qui constitue une propriété caractéristique des points F et F'; nous verrons plus loin que ces points sont les foyers de l'ellipse de Steiner, tangente aux trois côtés du triangle  $A_1 A_2 A_3$  en leurs milieux.

Nous poserons

$$\frac{1}{A_1 X} + \frac{1}{A_2 X} + \frac{1}{A_3 X} = \frac{3}{YX},$$

d'où, d'après ce qui précède,

$$\overline{A_1 X} \cdot \overline{A_2 X} \cdot \overline{A_3 X} = \overline{FX} \cdot \overline{F'X} \cdot \overline{YX}.$$

Nous dirons que le vecteur  $\overline{YX}$  ainsi défini est la moyenne harmonique des vecteurs  $\overline{A_1 X}$ ,  $\overline{A_2 X}$ ,  $\overline{A_3 X}$ ; plus brièvement, nous dirons que Y est l'harmonique de X par rapport à  $A_1 A_2 A_3$ .

On pourrait étudier la transformation générale qui fait correspondre à X son harmonique Y; on verrait qu'à tout point X situé dans le voisinage de  $A_i$  correspond un point Y dans le même voisinage, de sorte que les sommets  $A_i$  sont les points doubles de la transformation; à tout point X dans le voisinage de F ou de F' correspond un point Y situé dans le voisinage de la droite de l'infini.

Nous avons identiquement

$$x^3 + p x + q = x \left( x^2 + \frac{p}{3} \right) + \frac{2p}{3} \left( x + \frac{3q}{2p} \right).$$

Posons

$$u = \overline{GU} = -\frac{3q}{2p},$$

d'où

$$\frac{3}{2\overline{GU}} = -\frac{p}{q} = \frac{1}{\overline{GA_1}} + \frac{1}{\overline{GA_2}} + \frac{1}{\overline{GA_3}};$$

$2\overline{GU}$  est la moyenne harmonique des vecteurs  $\overline{GA_i}$ ; en d'autres termes, l'harmonique de G est son symétrique par rapport à U.

Nous aurons donc

$$\varphi(x) = x(x^2 - f^2) - 2f^2(x - u),$$

d'où nous tirons la *formule générale vectorielle*

$$\varphi(\overline{GX}) = \overline{A_1X} \cdot \overline{A_2X} \cdot \overline{A_3X} = \overline{GX} \cdot \overline{FX} \cdot \overline{F'X} + 2\overline{FG} \cdot \overline{F'G} \cdot \overline{UX}.$$

Si X vient en G, on a

$$\overline{A_1G} \cdot \overline{A_2G} \cdot \overline{A_3G} = q = 2\overline{FG} \cdot \overline{F'G} \cdot \overline{UG};$$

Si X vient en U, on trouve

$$\overline{A_1U} \cdot \overline{A_2U} \cdot \overline{A_3U} = \overline{GU} \cdot \overline{FU} \cdot \overline{F'U},$$

d'où

$$\frac{1}{\overline{A_1U}} + \frac{1}{\overline{A_2U}} + \frac{1}{\overline{A_3U}} = \frac{3\overline{FU} \cdot \overline{F'U}}{\overline{A_1U} \cdot \overline{A_2U} \cdot \overline{A_3U}} = \frac{3}{\overline{GU}},$$

ce qui montre que G est l'harmonique de U.

Nous avons donc l'interprétation géométrique

$$p = 3\overline{GF} \cdot \overline{GF'}, \quad q = 2\overline{GF} \cdot \overline{GF'} \cdot \overline{UG}.$$

Nous avons

$$\overline{GA_1} + \overline{A_1A_2} = \overline{GA_2},$$

d'où, en posant  $\overline{A_1A_2} = b_3$ , on aura

$$b_1 = a_3 - a_2, \quad b_2 = a_1 - a_3, \quad b_3 = a_2 - a_1.$$

On en tire

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0,$$

$$b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2,$$

et, comme  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ ,

$$b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1 = 3(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1) = 3p.$$

On a également

$$b_2 - b_3 = 2a_1, \quad a_2 - a_3 = 3a_1.$$

Nous considérerons les vecteurs

$$\overline{\text{GM}}_1 = \frac{b_1}{\sqrt{3}} = m_1, \quad \overline{\text{GM}}_2 = \frac{b_2}{\sqrt{3}} = m_2, \quad \overline{\text{GM}}_3 = \frac{b_3}{\sqrt{3}} = m_3;$$

il est clair qu'on aura

$$m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 = p,$$

et  $m_1, m_2, m_3$  seront les racines de l'équation

$$\psi(x) = x^3 + px + r = 0$$

avec

$$m_1 m_2 m_3 = \frac{b_1 b_2 b_3}{3\sqrt{3}} = -r.$$

Les deux triangles  $A_1 A_2 A_3, M_1 M_2 M_3$  peuvent être qualifiés de **réiproques**, c'est-à-dire qu'on a

$$\overline{\text{GM}}_1 = m_1 = \frac{\overline{A_2 A_3}}{\sqrt{3}},$$

$$\overline{\text{GA}}_1 = a_1 = \frac{b_2 - b_3}{3} = \frac{\overline{\text{GM}}_2 - \overline{\text{GM}}_3}{\sqrt{3}} = \frac{M_3 M_2}{\sqrt{3}}.$$

Chaque vecteur est égal au côté correspondant de l'autre triangle divisé par  $\sqrt{3}$  : en outre, ces deux triangles ont leurs **ellipses de Steiner** homofocales.

On aura comme précédemment

$$\psi(x) = x^3 + px + r = x \left( x^2 + \frac{p}{3} \right) + \frac{2p}{3} \left( x + \frac{3r}{2p} \right).$$

( 191. )

Posons

$$\nu = \overline{GV} = -\frac{3r}{2p},$$

d'où

$$\frac{3}{2\overline{GV}} = -\frac{r}{p} = \frac{1}{\overline{GM}_1} + \frac{1}{\overline{GM}_2} + \frac{1}{\overline{GM}_3},$$

$2\overline{GV}$  est la moyenne harmonique des vecteurs  $\overline{GM}_1$ ,  $\overline{GM}_2$ ,  $\overline{GM}_3$ ; en d'autres termes, l'harmonique de G (par rapport à  $M_1, M_2, M_3$ ) est le symétrique de G par rapport à V.

On a

$$\psi(x) = x(x^2 - f^2) - 2f^2(x - \nu),$$

d'où la *propriété générale vectorielle*

$$\psi(\overline{GX}) = \overline{M_1X} \cdot \overline{M_2X} \cdot \overline{M_3X} = \overline{GX} \cdot \overline{FX} \cdot \overline{F'X} + 2\overline{FG} \cdot \overline{F'G} \cdot \overline{VX}.$$

Si X vient en G, on a

$$\overline{M_1G} \cdot \overline{M_2G} \cdot \overline{M_3G} = r = 2\overline{FG} \cdot \overline{F'G} \cdot \overline{VG};$$

Si X vient en V, on trouve

$$\overline{M_1V} \cdot \overline{M_2V} \cdot \overline{M_3V} = \overline{GV} \cdot \overline{FV} \cdot \overline{F'V},$$

d'où

$$\frac{1}{\overline{M_1V}} + \frac{1}{\overline{M_2V}} + \frac{1}{\overline{M_3V}} = \frac{3\overline{FV} \cdot \overline{F'V}}{\overline{M_1V} \cdot \overline{M_2V} \cdot \overline{M_3V}} = \frac{3}{\overline{GV}},$$

ce qui montre que G est l'harmonique de V par rapport à  $M_1, M_2, M_3$ .

Nous savons que le discriminant  $\Delta$  satisfait à la relation

$$\begin{aligned} \Delta &= 4p^3 + 27q^2 = -[(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)]^2 \\ &= -27m_1^2 m_2^2 m_3^2 \\ &= -27r^2, \end{aligned}$$

et comme

$$p = -3f^2, \quad q = -\frac{2pu}{3}, \quad r = -\frac{2pv}{3},$$

il vient, après réductions,

$$q^2 + r^2 = 4f^6, \quad u^2 + v^2 = f^2$$

ou

$$\overline{GU}^2 + \overline{GV}^2 = \overline{GF}^2.$$

Telle est la relation simple entre les vecteurs dont nous avons donné la signification géométrique.

Il en résulte que  $\overline{GV}$  est parallèle à la bissectrice extérieure de  $FUF'$  et  $\overline{GU}$  parallèle à celle de  $FVF'$  : on a, en outre,

$$\overline{GU}^2 = \overline{VF} \cdot \overline{F'V},$$

$$\overline{GV}^2 = \overline{UF} \cdot \overline{F'U},$$

d'où il résulte que  $\overline{GU}$  et  $\overline{GV}$  sont des diamètres conjugués de l'ellipse de Steiner.

On sait que la racine  $\alpha_i$  de l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

est donnée par la formule de Cardan

$$\alpha_i = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}},$$

et, comme  $\Delta = -27r^2$ ,

$$\alpha_i = \sqrt[3]{\frac{-q + ir}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - ir}{2}},$$

et, en tenant compte de  $q^2 + r^2 = 4f^6$ ,

$$\frac{\alpha_i}{f^2} = \sqrt[3]{\frac{2}{-q + ir}} + \sqrt[3]{\frac{2}{-q - ir}},$$



( 193 )

et, en utilisant les relations ci-dessus,

$$\frac{a_i}{\sqrt[3]{f^3}} = \frac{1}{\sqrt{-u + i\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-u - i\nu}}.$$

On trouverait, par permutation des  $u$  et des  $\nu$ ,

$$\frac{m_i}{\sqrt[3]{f^3}} = \frac{1}{\sqrt{-\nu + iu}} + \frac{1}{\sqrt{-\nu - iu}}.$$

Nous avons trouvé précédemment, en appelant  $b_1, b_2, b_3$  les côtés de  $A_1 A_2 A_3$ ,

$$b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1 = 3p;$$

mais comme  $b_1 + b_2 + b_3 = 0$ , on a également

$$b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2 = -(b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1) = -3p,$$

car

$$(b_1 + b_2)^2 = -b_3(b_1 + b_2).$$

On sait, d'après une remarque due à M. Laisant <sup>(1)</sup>, que si l'on construit sur  $A_2 A_3$  deux triangles équilatéraux de côté et d'autre de la droite  $A_2 A_3$ , et si l'on appelle  $\omega, \omega'$  les centres de ces deux triangles, on aura

$$\overline{G\omega} \cdot \overline{G\omega'} = \overline{GF}^2 = \overline{GF'}^2,$$

$F, F'$  étant les foyers de l'ellipse de Steiner. Mais on trouve aisément que

$$\overline{G\omega} = \frac{1}{6}(b_3 - b_2) + \frac{i}{2\sqrt{3}}b_1,$$

$$\overline{G\omega'} = \frac{1}{6}(b_3 - b_2) - \frac{i}{2\sqrt{3}}b_1,$$

---

(1) Congrès de Toulouse, 1887; voir *Géométrie* de Rouché et de Comberousse, t. II, p. 624.

d'où

$$\begin{aligned}\overline{G\omega} \cdot \overline{G\omega'} &= \frac{1}{36} (b_3^2 - 2b_2b_3 + b_2^2 + 3b_1^2) \\ &= \frac{1}{9} (b_2^2 + b_2b_3 + b_3^2) = -\frac{p}{3} = f^2,\end{aligned}$$

ce qui montre que  $F, F'$  sont bien les foyers de l'ellipse de Steiner.

On connaît le théorème suivant : *Si, sur chaque côté  $A_2A_3 \dots$  d'un triangle  $A_1A_2A_3$ , on construit à l'intérieur et à l'extérieur des triangles équilatéraux de côté  $A_2A_3 \dots$ , les centres de ces triangles forment un triangle équilatéral.*

On obtient ainsi deux triangles équilatéraux de côtés

$$c, cj, cj^2, \quad d, dj^2, dj \quad (\text{avec } j^3 = 1).$$

Je dis qu'on a

$$cd = 3f^2.$$

En effet,

$$\begin{aligned}b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 \\ = 3(b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1) = 9p;\end{aligned}$$

mais le premier membre se décompose comme il suit :

$$-(b_1 + b_2j + b_3j^2)(b_1 + b_2j^2 + b_3j) = 9p,$$

et chacun des facteurs entre parenthèses est respectivement égal à  $3c$  et à  $3d$  comme il est aisé de s'en rendre compte.

Il vient donc

$$cd = -p = 3f^2.$$

La même propriété a lieu pour les triangles équilatéraux construits sur  $M_1M_2M_3$ .

Pour que  $U$  se trouve sur la droite  $FF'$  (et dans ce

cas V se trouve aussi sur cette droite), il faut et il suffit que  $p^3$ ,  $q^2$ ,  $r^2$  et, par conséquent,  $\Delta$  aient des arguments égaux (mod  $\pi$ ).

Dans ce cas, les sommets  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  sont également sur  $FF'$  ou forment un triangle isocèle ayant cette droite comme axe suivant que  $\Delta$  est négatif ou positif en prenant  $FF'$  comme axe initial de coordonnées.