R. GOORMAGHTIGH

Sur les faisceaux de coniques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 141-145

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__141_1>

[L¹18]

SUR LES FAISCEAUX DE CONIQUES;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

1. Soient A, B, C, D les points de base d'un faisceau ponctuel de coniques, et déterminons le lieu des centres de courbure de ces coniques correspondant au point de base A.

Une droite quelconque menée par A coupe en p et q les droites BD et CD, les perpendiculaires élevées en A sur AB et AC rencontrent en q' et p' les perpendiculaires élevées sur pq en q et p; si P est le point d'intersection de $p'q'$ avec la perpendiculaire élevée en A sur pq, le milieu ω de AP est le centre de courbure en A de la conique du faisceau qui touche pq en A [1].

Prenons comme axes de coordonnées les droites Aq' et AB, et soient

$$y = mx, \qquad x + \lambda y = b, \qquad x + \mu y = c,$$
$$y = \gamma x, \qquad y = \delta x$$

les équations de pq, BD, CD et des perpendiculaires élevées en A sur AC et AD. On en déduit comme coordonnées de p et q

$$\left(\frac{b}{1+\lambda m}, \frac{mb}{1+\lambda m}\right), \qquad \left(\frac{c}{1+\mu m}, \frac{mc}{1+\mu m}\right);$$

celles de p' et q' sont

$$\frac{b(m^2+1)}{(1+\lambda m)(1+\gamma m)}, \qquad \frac{b\gamma(m^2+1)}{(1+\lambda m)(1+\gamma m)}$$

et

$$\frac{c(m^2+1)}{1+\mu m}, \qquad 0.$$

L'équation de $p'q'$ s'écrit, par conséquent,

$$[b(1+\mu m) - c(1+\gamma m)(1+\lambda m)]y$$
$$- b\gamma(1+\mu m)x + bc\gamma(m^2+1) = 0.$$

---

[1] *Voir* P. Serret, *Géométrie de direction;* Fouret, *Comptes rendus Acad. Sc.*, 1890; Mannheim, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 578; Cesaro, *Natürliche Geometrie*, p. 130; *voir* aussi une Note de M. Bouvaist, *Nouvelles Annales*, 1916, p. 345.

On a donc comme équation du lieu

$$2y(y-\gamma x)[b(y-\mu x)-c(y-\lambda x)]+bc\gamma(x^2+y^2)=0,$$

ou, plus simplement,

$$2y(y-\gamma x)(y-\delta x)+\frac{bc\gamma}{b-c}(x^2+y^2)=0.$$

Le lieu des centres de courbure des coniques d'un faisceau, correspondant à l'un des points de base, est une cubique ayant ce point pour point isolé et dont les asymptotes sont perpendiculaires aux droites qui joignent ce point de base aux trois autres.

L'équation de la cubique montre que le produit des distances ω aux droites $y=0$, $y=\gamma x$, $y=\delta x$ est proportionnel à $\overline{A\omega}^2$.

Le carré du rayon de courbure d'une conique du faisceau en l'un des points de base est proportionnel au produit de ses projections sur les droites qui joignent ce point de base aux trois autres.

Supposons maintenant que le point A soit un centre isogone du triangle formé par les points B, C, D; on a alors $\gamma=\sqrt{3}$, $\delta=-\sqrt{3}$, et l'équation de la cubique s'écrit

$$2y(y^2-3x^2)+\frac{bc}{b-c}(x^2+y^2)\sqrt{3}=0;$$

c'est l'équation d'une trisectrice de G. de Longchamps.

Si l'un des points de base d'un faisceau de coniques est un centre isogone du triangle formé par les trois autres, le lieu de leurs centres de cour-

bure correspondant à ce point de base est une trisectrice de G. de Longchamps.

Transformons la figure par une inversion de centre A; les coniques du faisceau ont pour transformées les cubiques circulaires unicursales passant par les inverses de B, C, D et ayant leur point double en A; le cercle osculateur de l'une quelconque des coniques considérées a pour transformé l'asymptote de la cubique circulaire correspondante. Le lieu des projections de A sur les asymptotes des cubiques considérées est homothétique de l'inverse de la trisectrice; ce lieu est donc un trifolium régulier.

L'enveloppe des asymptotes des cubiques circulaires unicursales circonscrites à un triangle ayant leur point double en l'un des centres isogones est une hypocycloïde à trois rebroussements.

2. Considérons encore un faisceau tangentiel de coniques ayant pour tangentes communes les droites a, b, c, d et déterminons le lieu du centre de courbure de ces coniques correspondant aux points où elles touchent la tangente commune a.

Soient B et C les points d'intersection de a avec b et c, β et γ ceux de d avec b et c; si M est un point quelconque de a et si β' et γ' désignent les points où les perpendiculaires élevées en M sur Mβ et Mγ rencontrent celles élevées sur BC en C et B, la droite $\beta'\gamma'$ passe par le milieu du rayon de courbure en M de la conique du faisceau qui touche a en ce point (1).

Prenons comme axes de coordonnées les droites Bγ'

(1) *Voir* la Note de M. Bouvaist, *Sur la détermination du centre de courbure en un point d'une conique* (*Nouvelles Annales*, 1916, p 349).

et BC; soient m et c les ordonnées de M et C, (β, λ) les coordonnées de β, (γ, μ) celles de γ. On en déduit, pour celles de β',

$$\frac{1}{\beta}(m-c)(\lambda-m), \qquad c$$

et, pour celles de γ',

$$\frac{1}{\gamma}m(\mu-m), \qquad 0.$$

L'équation du lieu s'écrit alors

$$2y(y-c)[\gamma(\lambda-y)-\beta(\mu-y)]-c\beta\gamma x=0,$$

ou, en désignant par d l'ordonnée du point d'intersection des droites d et a,

$$2y(y-c)(y-d)-\frac{c\beta\gamma}{\beta-\gamma}x=0.$$

Le lieu cherché est donc une parabole cubique de Wallis passant par les points d'intersection de la tangente commune a avec les trois autres.

Le lieu des centres de courbure des coniques d'un faisceau tangentiel aux points où elles touchent l'une des tangentes communes est une parabole cubique.