NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. ARNOVLIEVITCH

Sur les théorèmes des projections et des moments des quantités de mouvement (Extrait d'une lettre à M. Appell)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 139-141

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__139_0>

[R6]

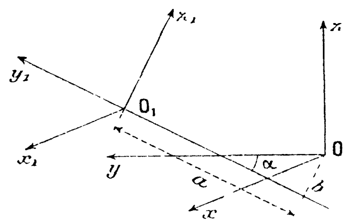
SUR LES THÉORÈMES DES PROJECTIONS ET DES MOMENTS DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT

(Extrait d'une lettre à M. Appell);

PAR M. J. ARNOVLIEVITCH.

En étudiant votre *Traité de Mécanique rationnelle* j'ai fait la remarque que le théorème des projections des quantités de mouvement est un cas particulier du théorème des moments, notamment quand les moments sont rapportés à un axe situé à l'infini.

Rapportons un système matériel à deux systèmes de coordonnées rectangulaires fixes $O_1 x_1 y_1 z_1$ et $Oxyz$,



dont les plans $y_1 O_1 z_1$ et yOz coïncident (plan de la figure). L'équation des moments par rapport à l'axe $O_1 z_1$ est

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\sum m\left[x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt}\right] = \sum\sum [x_1 Y_1 - y_1 X_1].$$

Les coordonnées xyz et $x_1 y_1 z_1$ d'un point matériel m et les composantes XYZ et $X_1 Y_1 Z_1$ des forces extérieures sont liées par les équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = x, \qquad y_1 = y\cos\alpha + z\sin\alpha - a, \\ \qquad\qquad z_1 = z\cos\alpha - y\sin\alpha + b; \\ \text{d'où} \\ \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{dx}{dt}, \qquad \dfrac{dy_1}{dt} = \dfrac{dy}{dt}\cos\alpha + \dfrac{dz}{dt}\sin\alpha; \\ X_1 = X, \quad Y_1 = Y\cos\alpha + Z\sin\alpha, \quad Z_1 = Z\cos\alpha - Y\sin\alpha. \end{array}\right.$$

En portant les valeurs (2) dans l'équation (1) nous aurons

$$(3)\quad \frac{d}{dt}\sum m\left[x\left(\frac{dy}{dt}\cos\alpha+\frac{dz}{dt}\sin\alpha\right)\right.$$
$$\left.-\frac{dx}{dt}(y\cos\alpha+z\sin\alpha-a)\right]$$
$$=\sum\sum[x(\mathrm{Y}\cos\alpha+\mathrm{Z}\sin\alpha)-\mathrm{X}(y\cos\alpha+z\sin\alpha-a)].$$

Divisons les deux membres de cette équation par a; on obtient

$$(4)\quad \frac{d}{dt}\sum m\left[\frac{dx}{dt}+\frac{1}{a}\left\{x\left(\frac{dy}{dt}\cos\alpha+\frac{dz}{dt}\sin\alpha\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{dx}{dt}(y\cos\alpha+z\sin\alpha)\right\}\right]$$
$$=\sum\sum\left[\mathrm{X}+\frac{1}{a}\left\{x(\mathrm{Y}\cos\alpha+\mathrm{Z}\sin\alpha)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\mathrm{X}(y\cos\alpha+z\sin\alpha)\right\}\right].$$

Imaginons que l'axe O_1z_1 s'éloigne vers l'infini tout en restant dans le plan yOz; la coordonnée a croît infiniment et les termes de (4) contenant $\frac{1}{a}$ s'annulent. L'équation (4) se réduit donc à

$$(5)\quad \frac{d}{dt}\sum m\frac{dx}{dt}=\sum\sum\mathrm{X},$$

qui exprime le théorème des projections des quantités de mouvement sur l'axe Ox.

Nous aurions le même résultat en écrivant l'équation des moments par rapport à l'axe O_1y_1. En effet, les deux axes O_1y_1, O_1z_1, s'éloignant vers l'infini, coïncident enfin avec la droite infiniment éloignée (yz) du plan yOz.

Les mêmes considérations étant faites sur les deux autres axes Oy et Oz, on peut dire :

Les équations des projections des quantités de mouvement sur les axes Ox, Oy, Oz sont identiques avec les équations des moments des quantités de mouvement par rapport aux axes infiniment éloignés (yz), (zx) et (xy). Ces derniers axes se trouvant dans le même plan, qui est le plan infiniment éloigné Π de l'espace, constituent avec les premiers les six arêtes d'un tétraèdre particulier.

Comme on peut substituer au plan Π un plan P quelconque déterminé, on peut exprimer les six équations universelles du mouvement de la manière suivante :

On obtient six équations du mouvement indépendantes en écrivant le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à chacune des six arêtes d'un tétraèdre.

Sous cette forme les six équations du mouvement donnent, dans le cas de valeurs constantes des vitesses, les conditions nécessaires d'équilibre d'un système matériel, exprimées dans le n° 100 de votre Ouvrage. Elles peuvent d'ailleurs se déduire de ces équations d'équilibre par le principe de d'Alembert.