

MATHIEU WEILL

**Théorèmes généraux sur des systèmes  
de courbes et de points**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 18  
(1918), p. 121-138

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1918\\_4\\_18\\_\\_121\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__121_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[M'1f]

**THÉORÈMES GÉNÉRAUX  
SUR DES SYSTÈMES DE COURBES ET DE POINTS ;**

PAR M. MATHIEU WEILL.

I. Considérons un faisceau linéaire de courbes représenté par l'équation

$$S + \lambda \Sigma = 0,$$

et prenons trois de ces courbes.

Dans l'équation

$$(1) \quad \lambda_1(S + \lambda \Sigma) + \lambda_2(S + \lambda' \Sigma) + \lambda_3(S + \lambda'' \Sigma) = 0,$$

on peut disposer de  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  de manière que cette équation soit une identité ; il faut pour cela que l'on ait

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 \lambda + \lambda_2 \lambda' + \lambda_3 \lambda'' &= 0, \end{aligned}$$

ce qui est toujours possible. Adoptons pour  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  un des systèmes de valeurs qui satisfont à ces deux relations ; pour ce système, l'équation (1) représente une courbe passant par un point quelconque du plan ; si nous considérons trois points quelconques, de coordonnées  $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3$ , on aura donc

$$\begin{aligned} \lambda_1[S_1 + \lambda \Sigma_1] + \lambda_2[S_1 + \lambda' \Sigma_1] + \lambda_3[S_1 + \lambda'' \Sigma_1] &= 0, \\ \lambda_1[S_2 + \lambda \Sigma_2] + \lambda_2[S_2 + \lambda' \Sigma_2] + \lambda_3[S_2 + \lambda'' \Sigma_2] &= 0, \\ \lambda_1[S_3 + \lambda \Sigma_3] + \dots &= 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que le déterminant formé avec les quantités  $S_1 + \lambda \Sigma_1, S_1 + \lambda' \Sigma_1, \dots, S_2 + \lambda \Sigma_2, \dots$  est nul, et l'on a le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Le déterminant formé avec les puissances de trois points quelconques du plan, par rapport à trois courbes faisant partie d'un faisceau linéaire, est nul.*

Le théorème, très général, s'applique, en particulier, à trois coniques passant par quatre points, à trois cercles ayant même axe radical, etc.

Considérons, de même, quatre courbes faisant partie d'un même réseau linéaire et quatre points du plan, nous arriverons, par le même raisonnement que plus haut, au résultat suivant : le déterminant formé par les puissances de quatre points du plan, par rapport à quatre courbes faisant partie d'un réseau linéaire, est nul. De même si l'on considère quatre courbes ayant pour équations :

$$\lambda^2 S + \lambda \Sigma + T = 0,$$

$$\lambda'^2 S + \lambda' \Sigma + T = 0,$$

$$\lambda''^2 S + \dots = 0,$$

$$\lambda'''^2 S + \dots = 0$$

( $S = 0$ ,  $\Sigma = 0$ ,  $T = 0$  étant les équations de trois courbes quelconques), le déterminant formé par les puissances de quatre points quelconques du plan, par rapport à ces quatre courbes, est nul.

On peut, évidemment, généraliser, et l'on aura, par exemple, les théorèmes suivants :

**THÉORÈME I.** — *Le déterminant formé par les puissances de sept points du plan, par rapport à sept coniques quelconques, est nul.*

**THÉORÈME II.** — *Le déterminant formé par les puissances de cinq points du plan, par rapport à cinq cercles quelconques, est nul.*

Les cas particuliers sont en nombre, pour ainsi dire, illimité.

On a, par exemple, les théorèmes suivants :

*Le déterminant formé par les puissances de quatre points, par rapport à quatre cercles qui ont un point commun, est nul.*

*Le déterminant formé par les puissances de quatre points, par rapport aux couples des côtés d'un triangle pris deux à deux et au cercle circonscrit à ce triangle, est nul.*

Parmi ces quatre points, supposons que trois soient sur le cercle circonscrit; soient  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$  les équations des trois côtés du triangle; le résultat sera le suivant :

$$\begin{vmatrix} A_1 B_1 & A_1 C_1 & B_1 C_1 \\ A_2 B_2 & A_2 C_2 & B_2 C_2 \\ A_3 B_3 & A_3 C_3 & B_3 C_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$A_i B_i$  désignant le produit des distances du point de coordonnées  $x, y$ , aux deux droites  $A = 0$ ,  $B = 0$ , et ainsi de suite. Le résultat se déduit, d'ailleurs, facilement, de l'équation du cercle circonscrit en coordonnées trilinéaires.

Nous allons particulariser encore et appliquer les raisonnements précédents aux relations entre les distances de  $n$  points du plan.

II. Soient  $S = 0$ ,  $\Sigma = 0$ ,  $T = 0$  les équations de trois cercles, en coordonnées rectangulaires; nous supposons que le coefficient de  $(x^2 + y^2)$  soit l'unité, dans chacune de ces équations. L'équation

$$\lambda_1 S + \lambda_2 \Sigma + \lambda_3 T + \lambda_4 = 0$$

représente un cercle quelconque; écrivons qu'il passe par trois points donnés, et qu'il se réduit à une droite, nous aurons

$$\begin{aligned}\lambda_1 S_1 + \lambda_2 \Sigma_1 + \lambda_3 T_1 + \lambda_4 &= 0, \\ \lambda_1 S_2 + \lambda_2 \Sigma_2 + \dots &= 0, \\ \lambda_1 S_3 + \dots &= 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots &= 0.\end{aligned}$$

Donc, les puissances de trois points en ligne droite, par rapport à trois cercles, sont liées par l'équation

$$\begin{vmatrix} S_1 & \Sigma_1 & T_1 & 1 \\ S_2 & \Sigma_2 & T_2 & 1 \\ S_3 & \Sigma_3 & T_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

1° Si les trois cercles se réduisent à des points confondus avec les trois points donnés, on aura, en désignant par  $\overline{12}^2$  le carré de la distance des points (1) et (2),

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & 1 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0$$

ou

$$(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(a - b - c) = 0,$$

$a, b, c$  désignant les longueurs des côtés du triangle formé par les trois points, triangle réduit ici à une droite.

2° Si les trois cercles se réduisent à des points et que deux de ces cercles-points se confondent avec deux des

points donnés A, B, nous aurons

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12} & \overline{D1} & 1 \\ \overline{21} & 0 & \overline{D2} & 1 \\ \overline{31} & \overline{32} & \overline{D3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\overline{DA}^2 \cdot BC + \overline{DB}^2 \cdot CA + \overline{DC}^2 \cdot AB + AB \cdot BC \cdot CA = 0,$$

ce qui est le théorème de Stewart.

3<sup>o</sup> Exprimons que le cercle qui a pour équation

$$\lambda_1 S + \lambda_2 \Sigma + \lambda_3 T + \lambda_4 = 0$$

passe par quatre points, nous aurons

$$\begin{vmatrix} S_1 & \Sigma_1 & T_1 & 1 \\ S_2 & \Sigma_2 & T_2 & 1 \\ S_3 & \Sigma_3 & T_3 & 1 \\ S_4 & \Sigma_4 & T_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

relation entre les puissances de quatre points d'un cercle par rapport à trois autres cercles.

Supposons que les trois cercles S,  $\Sigma$ , T se réduisent à trois points, confondus avec trois des quatre points donnés, nous aurons

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12} & \overline{13} & 1 \\ \overline{21} & 0 & \overline{23} & 1 \\ \overline{31} & \overline{32} & 0 & 0 \\ \overline{41} & \overline{42} & \overline{43} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} a^2 a'^2 (b'^2 + c'^2 - a'^2) + b^2 b'^2 (c'^2 + a'^2 - b'^2) \\ + c^2 c'^2 (a'^2 + b'^2 - c'^2) - 2 a'^2 b'^2 c'^2 = 0, \end{aligned}$$

relation entre les carrés des distances mutuelles de quatre points d'une circonférence.

On obtiendra, évidemment, d'autres relations analogues en faisant les substitutions

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a' & b' & c' \\ b' & c & a' & b & c' & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c & a' & b' & c' \\ c' & a & b' & c & a' & b \end{vmatrix},$$

et ainsi de suite.

Deux d'entre elles suffiront à les déterminer toutes, car il y a quatre arbitraires parmi les six distances.

4° L'équation  $\lambda_1 S + \lambda_2 T + \lambda_3 U + \lambda_4 V = 0$  représente un cercle quelconque; écrivons qu'il passe par quatre points donnés, nous aurons

$$\begin{vmatrix} S_1 & T_1 & U_1 & V_1 \\ S_2 & T_2 & U_2 & V_2 \\ S_3 & T_3 & \dots & \dots \\ S_4 & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exprime que le déterminant formé par les puissances de quatre points d'un cercle, par rapport à quatre autres cercles du plan, est nul.

Si les quatre cercles sont des cercles-points, confondus avec les quatre points donnés, on aura

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12} & \overline{13} & \overline{14} \\ \overline{21} & 0 & \overline{23} & \overline{24} \\ \overline{31} & \overline{32} & 0 & \overline{34} \\ \overline{41} & \overline{42} & \overline{43} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$a^4 a'^4 + b^4 b'^4 + c^4 c'^4 - 2a^2 a'^2 b^2 b'^2 \dots = 0,$$

en désignant par  $a, a', b, b', \dots$  les distances mutuelles des quatre points; cette égalité peut s'écrire

$$\begin{aligned} & (aa' + bb' + cc')(aa' + bb' - cc') \\ & + (aa' - bb' + cc')(aa' - cc' - bb') = 0. \end{aligned}$$

En égalant à zéro l'un quelconque de ces facteurs, on a le théorème de Ptolémée sur le quadrilatère inscrit.

### III. L'équation

$$\lambda_1 S + \lambda_2 T + \lambda_3 U + \lambda_4 V + \lambda_5 = 0$$

représente un cercle quelconque. Nous pouvons disposer des  $\lambda$  de façon que ce soit une identité; on aura, en particulier,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0.$$

D'autre part, en adoptant les valeurs de  $\lambda$  qui font de l'équation une identité, nous pourrions faire passer ce cercle par quatre points quelconques du plan; nous aurons donc la relation

$$(1) \quad \begin{vmatrix} S_1 & T_1 & U_1 & V_1 & 1 \\ S_2 & T_2 & U_2 & V_2 & 1 \\ S_3 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ S_4 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

entre les puissances de quatre points quelconques du plan par rapport à quatre cercles quelconques.

Si les quatre cercles se réduisent à des points confondus avec les quatre points donnés, on aura

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12} & \overline{13} & \overline{14} & 1 \\ \overline{21} & 0 & \overline{23} & \overline{24} & 1 \\ \overline{31} & \overline{32} & 0 & \overline{34} & 1 \\ \overline{41} & \overline{42} & \overline{43} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

relation entre les distances mutuelles de quatre points



quelconques du plan, ou

$$\begin{aligned} & \Sigma a^2 a'^2 (b^2 + c^2 - a^2 + b'^2 + c'^2 - a'^2) \\ & - a^2 b^2 c'^2 - a^2 c^2 b'^2 - b^2 c^2 a'^2 - a'^2 b'^2 c'^2 = 0, \end{aligned}$$

en appelant  $a, b, c$  les distances d'un des points aux trois autres, et  $a', b', c'$  les autres distances correspondantes.

Si  $V$  désigne le volume du tétraèdre dont les arêtes ont pour longueur  $a, b, c, a', b', c'$ , le premier membre de la relation est égal à  $144.V^2$ ; il admet les substitutions

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cccccc} a & b & c & a' & b' & c' \\ a' & b' & c & a & b & c' \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cccccc} a & b & c & a' & b' & c' \\ a & b' & c' & a' & b & c \end{array} \right|, \\ & \left| \begin{array}{cccccc} a & b & c & a' & b' & c' \\ a' & b & c' & a & b' & c \end{array} \right|, \quad \dots \text{ (en tout 24),} \end{aligned}$$

ce qui se vérifie immédiatement.

Le premier membre peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} F = & \{ a^2 b^2 c^2 - \Sigma a^2 (b^2 + c^2 - a'^2) \\ & + (b^2 + c^2 - a'^2)(c^2 + a^2 - b'^2)(a^2 + b^2 - c'^2) \}. \end{aligned}$$

En particulier, si les points A, B, C sont en ligne droite, on a

$$b' = a' + c',$$

et l'on trouve que  $-F$  est le carré du polynome

$$b^2(a' + c') + a'c'(a' + c') - a^2a' - c^2c',$$

on retrouve ainsi la relation de Stewart.

Si, dans la relation (1), on suppose que le cercle S passe par les points 1, 2, 3, le cercle T par les points 2, 3, 4 et ainsi de suite, on arrive au résultat suivant :

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{U_2} + \frac{1}{V_3} + \frac{1}{S_4} = 0,$$

c'est-à-dire que, si l'on considère quatre points quelconques, la somme des inverses des puissances de chacun d'eux, par rapport au cercle qui passe par les trois autres, est nulle.

IV. Considérons trois cercles représentés par  $S = 0$ ,  $T = 0$ ,  $U = 0$ ; soit  $C = 0$  l'équation du cercle orthogonal aux trois cercles; l'équation

$$\lambda_1 S + \lambda_2 T + \lambda_3 U = 0$$

représente un cercle orthogonal au cercle C. Exprimons qu'il passe par trois points donnés, nous aurons

$$\begin{vmatrix} S_1 & T_1 & U_1 \\ S_2 & T_2 & U_2 \\ S_3 & T_3 & U_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc, si quatre cercles sont orthogonaux à un même cercle, le déterminant formé par les puissances de trois points d'un des cercles, par rapport aux trois autres cercles, est nul.

En particulier si les cercles S, T, U sont des cercles-points, C est le cercle circonscrit au triangle formé par ces trois points, et l'on a le résultat suivant : si deux cercles sont orthogonaux, et si l'on prend trois points sur l'un et trois points sur l'autre, le déterminant formé avec les carrés des distances des trois premiers points aux trois autres est nul.

Si les trois points du premier groupe sont en ligne droite, on a

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0;$$

les trois points A, B, C sont sur une droite orthogonale au cercle circonscrit au triangle DEF formé par les trois autres points; c'est donc une droite passant

par le centre O de ce cercle; on a les quatre équations

$$\begin{aligned} \lambda_1 \overline{AD}^2 + \lambda_2 \overline{AE}^2 + \lambda_3 \overline{AF}^2 &= 0, \\ \lambda_1 \overline{BD}^2 + \dots &= 0, \\ \lambda_1 \overline{CD}^2 + \dots &= 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

En prenant les deux premières et la quatrième, on a la relation

$$\begin{vmatrix} \overline{AD}^2 & \overline{AE}^2 & \overline{AF}^2 \\ \overline{BD}^2 & \overline{BE}^2 & \overline{BF}^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\Sigma \overline{AD}^2 (\overline{BE}^2 - \overline{BF}^2) = 0,$$

relation remarquable entre les distances de deux points, pris sur un diamètre du cercle circonscrit à un triangle, aux sommets de ce triangle.

Réduisons quatre cercles du plan à leurs centres de coordonnées  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ . L'équation

$$\begin{aligned} \lambda_1 [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] \\ + \lambda_2 [(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2] + \dots + \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

représente un cercle quelconque; exprimons que l'équation est une identité, nous aurons

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots = 0, \\ \lambda_1 y_1 + \dots = 0, \\ \lambda_1 (x_1^2 + y_1^2) + \dots + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Ce système admet toujours des solutions pour les  $\lambda$ . Adoptons une des solutions, et écrivons que le cercle passe par les points  $x, y, \dots$  et aussi par un cinquième





telles de cinq points quelconques de l'espace est

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 & \overline{15}^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \dots & \dots & 1 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \overline{41}^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \overline{51}^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

7° Si l'on considère cinq points de l'espace, la somme des inverses des puissances de chacun par rapport à la sphère qui passe par les quatre autres est nulle.

VI. Considérons un triangle de côtés  $a, b, c$ , et soient  $x, y, z$  les distances d'un point du plan aux sommets du triangle. Nous avons trouvé entre ces six quantités la relation

$$(1) \quad \Sigma x^2 a^2 (y^2 + z^2 - x^2 + b^2 + c^2 - a^2) - x^2 y^2 c^2 - x^2 z^2 b^2 - y^2 z^2 a^2 - a^2 b^2 c^2 = 0.$$

Les carrés des distances de certains points remarquables du plan du triangle aux sommets sont des fonctions rationnelles de  $a, b, c$ ; ceci a lieu, en particulier, pour l'orthocentre, le point de concours des médianes, des bissectrices, etc.

On peut se proposer de trouver tous les points du plan pour lesquels les quantités  $x^2, y^2, z^2$  sont fonctions rationnelles de  $a^2, b^2, c^2$ . Désignons  $a^2, b^2, c^2$  par  $\alpha, \beta, \gamma$ , et  $x^2, y^2, z^2$  par  $u, v, w$ ; soient  $u_1, v_1, w_1$  des valeurs de  $u, v, w$  répondant à la question, par exemple, les carrés des distances du point de con-

cours des médianes aux sommets du triangle; posons

$$(2) \quad \begin{cases} u = u_1 + \lambda \delta, \\ v = v_1 + \lambda' \delta, \\ w = w_1 + \lambda'' \delta \end{cases}$$

et substituons dans la relation (1); nous aurons une équation du second degré en  $\delta$ , qui admettra la solution  $\delta = 0$ ; il restera donc une relation du premier degré en  $\delta$ , d'où nous tirerons  $\delta$  en fonction rationnelle de  $u_1, v_1, w_1, \lambda, \lambda', \lambda'', \alpha, \beta, \gamma$ .

Nous en déduirons ensuite les valeurs de  $u, v, w$  par les équations (2) et nous aurons la solution complète du problème. En donnant, dans les relations trouvées, des valeurs arbitraires à  $\lambda, \lambda', \lambda''$ , on aura tous les systèmes de valeurs de  $x^2, y^2, z^2$ ; deux valeurs seulement, par exemple  $x^2$  et  $y^2$ , suffiront pour déterminer le point correspondant à un système de valeurs de  $\lambda, \lambda', \lambda''$ .

VII. Une relation entre les distances de cinq points d'une sphère est, comme il est facile de le voir à l'aide des méthodes précédentes :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 0 & 12^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \overline{24}^2 & 1 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & \dots & 1 \\ \overline{41}^2 & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \overline{51}^2 & \overline{52}^2 & \overline{53}^2 & \overline{54}^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou, en désignant les distances  $\overline{51}, \overline{52}, \overline{53}, \overline{54}$  par  $x, y, z, t$ , les autres distances par  $a, b, c, a', b', c'$ ,

$$(1) \quad \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + \rho t^2 + h = 0.$$

Le coefficient  $\lambda$  n'est autre que

$$a^2 a'^2 (b'^2 + c'^2 - a'^2) + b^2 b'^2 (c'^2 + a'^2 - b'^2) \\ + c^2 c'^2 (a'^2 + b'^2 - c'^2) - 2 a'^2 b'^2 c'^2,$$

c'est-à-dire que  $\lambda = 0$  est la relation que nous avons trouvée entre les distances mutuelles de quatre points d'un cercle.  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\rho$  ne sont autres que les valeurs que prend  $\lambda$  par des substitutions évidentes; quant à  $h$ , il est égal à

$$(aa' + bb' + cc')(aa' + bb' - cc') \\ \times (aa' + cc' - bb')(aa' - cc' - bb').$$

Le déterminant du cinquième ordre est donc facile à développer; si nous appelons  $D$  le diamètre de la sphère, la relation est vérifiée si l'on y remplace  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $z^2$ ,  $t^2$  par  $D^2 - x^2$ ,  $D^2 - y^2$ , ...; on a donc

$$(\lambda + \mu + \nu + \rho)D^2 + 2h = 0;$$

cette méthode fournit donc, très simplement, l'expression du rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre dont on connaît les six arêtes.

Nous avons établi une relation entre les distances de quatre points quelconques du plan; d'autre part, nous avons établi une relation entre les distances de quatre points d'une circonférence; soient  $a$ ,  $b$ ,  $c$  les trois côtés d'un triangle,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  les distances d'un point  $A$ , du cercle circonscrit, aux trois sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; une combinaison facile des deux relations dont nous venons de parler donne la relation remarquable

$$\Sigma x^2 y^2 (a^2 + b^2 - c^2) - \Sigma x^4 a^2 + a^2 b^2 c^2 = 0.$$

VIII. Nous avons trouvé, entre les distances mutuelles de quatre points du plan, la relation

$$(1) \quad \Sigma a^2 a'^2 (b^2 + c^2 - a^2 + b'^2 + c'^2 - a'^2) \\ - \Sigma a^2 b'^2 c^2 - a^2 b^2 c'^2 = 0.$$



$a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  étant les distances de l'un des points D aux trois autres A, B, C.

Si le point D décrit une courbe  $f(a' b' c') = 0$ , l'élimination de  $c'$  entre l'équation  $f = 0$  et la relation (1) donne, entre  $a'$  et  $b'$ , une relation qui représente une courbe formée de la première courbe et d'une autre; on a ainsi, d'une manière générale, une équation représentant une courbe qui se décompose; on peut déduire de là un grand nombre de théorèmes nouveaux.

Nous étudierons des cas particuliers très simples, en prenant pour triangle ABC un triangle équilatéral.

Définissons le lieu d'un point M par l'équation

$$a'^2 + c'^2 = a^2,$$

qui représente le cercle décrit sur AC comme diamètre; d'où

$$c'^2 = a^2 - a'^2;$$

remplaçons  $c'^2$  par cette valeur dans la relation (1), il vient une relation entre  $a'^2$  et  $b'^2$ , le lieu des points qui satisfont à cette relation est une courbe du quatrième degré en  $x, y$ ; en prenant deux axes rectangulaires se croisant au centre du triangle, Ox étant parallèle à BC, l'équation est

$$-36(x^2 + y^2)^2 + 21a^2(x^2 + y^2) + \dots = 0,$$

qui se décompose en

$$6y^2 + 6x^2 - ay\sqrt{3} - 3ax - a^2 = 0,$$

qui représente le cercle décrit sur AC comme diamètre et en un second cercle qui est symétrique du premier par rapport à AB; ces deux cercles forment le lieu des points M pour lesquels il y a, entre les distances MA, MB, la relation dont nous avons parlé.

( 137 )

La relation (1), pour le triangle équilatéral, devient

$$(1) \quad a^2(\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2) - a^4 + \Sigma \overline{MA}^2 \cdot \overline{MB}^2 - \Sigma \overline{MA}^4 = 0.$$

Soit un point **M** pour lequel on a

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{MC}^2.$$

Le lieu de ce point est une droite qui a pour équation

$$(2) \quad y + x\sqrt{3} = 0.$$

Remplaçons dans la relation (1),  $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2$  par  $2\overline{MC}^2$ , il vient

$$(3) \quad a^2 \cdot 3\overline{MC}^2 - a^4 - \overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 + 2\overline{MC}^4 + \overline{MA}^2 \cdot \overline{MB}^2 = 0,$$

relation entre les trois distances  $\overline{MA}^2$ ,  $\overline{MB}^2$ ,  $\overline{MC}^2$ , ou

$$3y^2 + (ay^2 + 3xy^2)\sqrt{3} + \dots = 0,$$

qui se décompose en la droite  $y + x\sqrt{3} = 0$  et un cercle imaginaire. Ainsi, le lieu des points **M** qui satisfont à la relation (3) est formé d'une droite et d'un cercle imaginaire.

Soit la même relation

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{MC}^2,$$

la relation (1) pourra s'écrire

$$a^2(\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2) - a^4 + \overline{MC}^4 + \overline{MA}^2 \cdot \overline{MB}^2 - \overline{MA}^4 - \overline{MB}^4 = 0,$$

le lieu des points qui satisfont à cette nouvelle relation sera formé de la droite précédente

$$y + x\sqrt{3} = 0$$

et, cette fois, d'un cercle-point, qui n'est autre que le sommet C du triangle équilatéral, résultat facile à vérifier.

Soit, enfin, la relation

$$\overline{\text{MB}}^2 + \overline{\text{MC}}^2 = \text{K}^2;$$

on trouve que le lieu des points qui satisfont à la relation, tirée de la relation (1),

$$a^2(\overline{\text{MA}}^2 + \text{K}^2) - a^3 + \text{K}^2 \cdot \overline{\text{MA}}^2 - \text{K}^4 - \overline{\text{MA}}^4 + 3\overline{\text{MB}}^2 \cdot \overline{\text{MC}}^2 = 0.$$

est formé de deux cercles, savoir celui qui a pour équation

$$\overline{\text{MB}}^2 + \overline{\text{MC}}^2 = \text{K}^2$$

ou

$$x^2 + y^2 + \frac{a^2}{3} + \frac{ay}{\sqrt{3}} - \frac{\text{K}^2}{2} = 0$$

et un second cercle, qui a pour équation

$$x^2 + \left(y + \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \text{K}^2 - a^2 = 0.$$

La méthode que nous venons d'employer et qui peut fournir un très grand nombre de théorèmes nouveaux consiste, non pas à éliminer une des quantités  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  entre la relation fondamentale et une équation  $f(a' b' c') = 0$ , qui définit une courbe, mais à combiner, de diverses manières, la relation fondamentale et l'équation  $f = 0$ .

---