Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 102-118

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__102_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1660.

(1894, p. 1*.)

Les deux tangentes au point double d'une cubique étant réelles, si d'un point A_1 de la courbe on peut mener deux *tangentes réelles, il n'y a qu'un des points de contact, soit A_2, d'où l'on puisse mener de nouveau des tangentes réelles; alors A_2 donne A_3, ...; les points ainsi obtenus tendent vers le point d'inflexion réel de la courbe.*

A. Astor.

SOLUTION

Par un Anonyme.

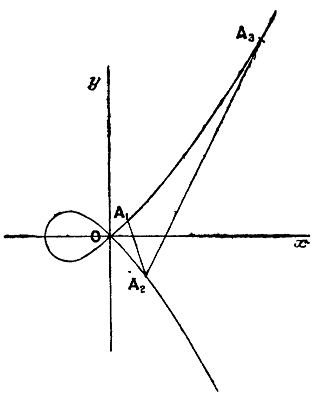
Newton a montré que toute courbe du troisième degré peut être regardée comme la perspective d'une courbe parabolique ayant pour équation

$$y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Considérons la courbe dont l'équation est

$$by^2 = x^2(x + a),$$

a et b étant positifs; l'origine est un point double à tangentes



réelles distinctes. Avec $y = tx$, on a

$$x = -a + bt^2,$$
$$y = -at + bt^3.$$

Les trois points t_1, t_2, t_3 sont en ligne droite si l'on a

$$t_2 t_3 + t_3 t_1 + t_1 t_2 = -\frac{a}{b};$$

ou donc pour les points A_2 dont le *tangentiel* est A_1,

$$(1) \qquad t_2^2 + 2t_1 . t_2 + k^2 = 0,$$

avec $k^2 = \frac{a}{b}$. Sous la condition

$$t_1^2 > k^2,$$

équivalente à $x_1 > 0$, l'équation (1) a deux racines de même signe, le signe commun étant contraire au signe t_1; leur produit étant k^2, le carré de l'une surpasse k^2, on prend celle-là et elle donne t_3; on continue ainsi. Les points A ont des abscisses positives.

Comme on a

$$t_2 = - t_1 - \varepsilon \sqrt{t_1^2 - k^2},$$

ε étant le signe de t_1, on a

$$| t_2 | = | t_1 | + \sqrt{t_1^2 - k^2},$$

et les t vont en croissant; la différence $|t_2| - |t_1|$ va en croissant, les modules des t croissent plus vite que les termes d'une progression arithmétique croissante, $|t_n|$ est un infiniment grand. Or la courbe a trois points d'inflexion dont un seul est réel, à savoir le point à l'infini dans la direction Oy; comme la valeur infinie de t donne ce point, le fait annoncé est établi.

Si l'on passe, au contraire, d'un point A_3 à son tangentiel A_2, ..., le point limite est le point double

Dans le cas de la parabole semi-cubique, $a = 0$, la relation entre t_1 et t_2 se réduit à

$$t_2 + 2t_1 = 0,$$

la relation $t_2 = 0$ devant être écartée.

1672.

(1894, p. 4*, 1917, p. 238.)

La podaire du centre de la courbe

$$4(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^4 = 0$$

a pour équation

$$4(x^2 + y^2)^3 - a^2(x^2 + 2y^2)^2 = 0.$$

Le rapport de l'aire de la première courbe à celle de la seconde est $\frac{15}{19}$. E.-N. Barisien.

SOLUTION

Par M. R. Goormaghtigh.

Considérons une famille de développantes d'astroïde Γ; la première des deux courbes envisagées dans l'énoncé est une courbe limite Γ_0 entre les courbes Γ à rebroussements et celles sans rebroussements. On nous a montré (*Nouvelles Annales*, 1916, p. 29) que, si l'on projette un point variable $M(\alpha, \beta)$ de la parabole

$$2ax = a^2 - y^2,$$

en P sur la corde focale principale $x = 0$, la courbe considérée est l'enveloppe du cercle de centre P, de rayon PM. Les rayons de cercle qui passent par les points caractéristiques font avec la direction positive de l'axe y des angles θ tels que $\cos\theta = \beta : a$. La courbe Γ_0 peut donc être définie par les équations paramétriques

$$x = \alpha \sin\theta = \frac{1}{2a^2}(a^2 - \beta^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$y = \beta + \alpha\cos\theta = \frac{\beta}{2a^2}(8a^2 - \beta^2).$$

En posant

$$\beta : a = z = \sin\varphi,$$

on voit que l'aire de cette courbe a pour expression

$$4\int_0^{\frac{a}{2}} y\,dx = -\frac{3}{a^4}\int_a^0 \beta^2(3a^2 - \beta^2)\sqrt{a^2 - \beta^2}\,d\beta$$

$$= 3a^2\int_0^1 z^2(3 - z^2)\sqrt{1 - z^2}\,dz$$

$$= 3a^2\left(3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\right)$$

$$= 3a^2\left(\frac{3}{16}\pi - \frac{1}{32}\pi\right) = \frac{15}{32}\pi a^2.$$

Si x, y désignent maintenant les coordonnées de la projection de l'origine sur l'une des tangentes à Γ_0 correspondant au point M de la parabole, on a

$$\frac{x^2}{y^2} = \text{tang}^2\theta = \frac{a^2 - \beta^2}{\beta^2},$$

$$y = \beta + \alpha\cos\theta - \beta\sin^2\theta = \frac{\beta}{2a^2}(a^2 + \beta^2).$$

Par conséquent,

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 y^2}{\beta^2}, \qquad x^2 + 2y^2 = \frac{y^2}{\beta^2}(a^2 + \beta^2) = \frac{2a^2 y^3}{\beta^3};$$

l'équation de la podaire est donc

$$4(x^2 + y^2)^3 - a^2(x^2 + 2y^2)^2 = 0.$$

D'après un théorème de Catalan, l'aire d'une courbe convexe vaut la différence des aires de sa podaire et de sa contre-podaire par rapport à un même point intérieur à la courbe. La développée de Γ_0 est une astroïde dont le cercle C a pour rayon $\frac{a}{2}$; la rosace à quatre branches, podaire de cet astroïde, a pour aire la moitié de celle du cercle C, c'est-à-dire $\frac{1}{8}\pi a^2$. Par suite, l'aire de la podaire de Γ_0 vaut

$$\left(\frac{15}{32} + \frac{1}{8}\right)\pi a^2 = \frac{19}{32}\pi a^2:$$

les aires de Γ_0 et de sa podaire sont donc dans le rapport de 15 à 19.

1775.

(1893, p. 387; 1916, p. 31.)

On donne un point O *et une droite* D *fixes. Une figure de grandeur invariable formée d'un point* ω *et d'une droite* Δ *se déplace de façon que* ω *reste sur* D *et que* Δ, *s'appuyant toujours sur cette droite, passe toujours par* O. *On demande le lieu d'un point arbitraire du plan de la figure mobile. Examiner les différentes formes de ce lieu, lorsqu'on fait varier les données.* MANNHEIM.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soit P le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur D; prenons pour origine P, pour axes fixes $\overline{\mathrm{PO}x}$ et la droite $\mathrm{D} \equiv \overline{\mathrm{P}y}$. Soit P_1 le pied de la perpendiculaire abaissée de ω sur Δ, prenons pour axes mobiles $\overline{\omega \mathrm{P}_1 \mathrm{X}}$ et $\mathrm{OP}_1\mathrm{Y} \equiv \Delta$.

Si X et Y sont les coordonnées relatives, x et y les coordonnées absolues d'un point M de la figure mobile, on a évidemment, en posant $\overline{\mathrm{P}_1\omega} = -l$, $\overline{\mathrm{PO}} = a$,

$$x = l\cos\varphi + \mathrm{X}\cos\varphi - \mathrm{Y}\sin\varphi,$$

$$y = \left(\frac{a - l\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)\cos\varphi + \mathrm{X}\sin\varphi + \mathrm{Y}\cos\varphi,$$

équations qui définissent en général une quartique unicursale. Nous n'entrerons pas dans l'étude générale de cette courbe et nous nous bornerons à signaler que si $a = l$, $\mathrm{X} = -\frac{l}{2}$, $\mathrm{Y} = 0$, le point M décrit une *cissoïde droite* ayant pour point de rebroussement le milieu O′ de OP, qui est la tangente de rebroussement, l'asymptote étant la parallèle à D menée par le point O″, symétrique de O′ par rapport à P. Cette génération de la cissoïde droite est du reste bien connue.

1839.

(1900, p. 190.)

Soient AA′, BB′ *les axes d'une ellipse telle que l'angle* BAB′ *soit égal à* $\frac{k\pi}{n}$, *k et n étant premiers entre eux;* P *un point de* AA′ *ou de ses prolongements;* $\mathrm{P}_0\mathrm{M}_0\mathrm{P}_1\mathrm{M}_1$ ... *une ligne brisée rectangulaire dont les éléments font avec* AA′ *les angles* $+\frac{\pi}{4}$, *dont les sommets* P_0, P_1, ... *sont sur* AA′, *les sommets* M_0, M_1, ... *sont sur l'ellipse et tellement placés que deux sommets successifs* M_i, M_{i+1} *ne soient pas symétriques par rapport à* AA′; P_0 *coïncide avec* P_n *si k est pair; avec* P_{2n} *si k est impair.*

LÉMERAY.

SOLUTION
Par L'AUTEUR.

Une erreur typographique a obscurci la question. Il faut *lire,* ligne 5, $\frac{\pi}{4}$ *au lieu de* $\frac{\pi}{n}$ ([1]). L'équation de l'ellipse, rapportée à ses axes, est

$$x^2 + \frac{y^2}{\tan^2 \frac{K\pi}{2n}} = a^2. \tag{1}$$

Faisons tourner les axes de 45°, de manière que le grand axe de l'ellipse devienne la bissectrice positive des nouveaux axes de coordonnées; les lignes obliques aux axes de l'ellipse sont maintenant parallèles aux axes de coordonnées; désignons par ξ et η les nouvelles coordonnées; on a

$$x = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{\eta - \xi}{\sqrt{2}};$$

l'équation (1) devient

$$\eta^2 - 2\xi\eta \cos\frac{K\pi}{n} + \xi^2 - 2a^2 \sin^2\frac{K\pi}{2n} = 0. \tag{2}$$

Cherchons les limites de ξ. Pour que les deux valeurs de η soient égales, il faut avoir

$$\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\cos\frac{K\pi}{2n}} = A, \qquad a = A\sqrt{2}\cos\frac{K\pi}{2n}.$$

Comme tout est symétrique par rapport à la bissectrice positive, η a les mêmes limites.

L'équation (2) s'écrit

$$\eta^2 - 2\xi\eta \cos\frac{K\pi}{n} + \xi^2 - A^2 \sin^2\frac{K\pi}{n} = 0,$$

([1]) Cette correction est faite dans la reproduction de l'énoncé qui précède.

d'où l'on tire

$$\frac{\eta}{A} = \frac{\xi}{A}\cos\frac{K\pi}{n} \pm \sin\frac{K\pi}{n}\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{A}\right)^2}.$$

Posons

$$\frac{\xi}{A} = \sin\varphi.$$

Il vient

$$\frac{\eta}{A} = \sin\left(\varphi \pm \frac{K\eta}{n}\right),$$

ce qui démontre la proposition.

1909.

(1901, p. 48.)

On compare à un thermomètre centigrade un autre thermomètre marquant aussi 0° *et* 100° *dans la glace fondante et l'eau bouillante, mais gradué de telle sorte que, quand on passe de* $\theta°$ *à* $(B+1)°$, *le volume* V_B *s'accroît d'une fraction constante* β, *non du volume à* 0°, *mais du volume à* $\theta°$. *Quelle est la température centigrade* t *d'un milieu pour lequel la lecture sur le second thermomètre dépasse de* T *la lecture faite sur le premier?*

LÉMERAY.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Les deux thermomètres sont identiques, sauf pour la graduation. Soit $h = 100\,K$ la distance entre les deux repères 0 et 100, communs aux deux instruments. Écrivons a au lieu de 100. On a les trois conditions

$$(1+\beta)^a = 1 + Ka, \qquad (1+\beta)^\theta = 1 + Kt, \qquad \theta = T + t.$$

Eliminons θ et β en élevant les deux membres de la première équation à la puissance $\frac{1}{a}$; ceux de la seconde à la puissance $\frac{1}{\theta}$; il reste

$$(1+Ka)^{\frac{1}{a}} = (1+Kt)^{\frac{1}{T+t}},$$

qu'on peut écrire

$$(1+Ka)^{\frac{T}{a}}\left[(1+Ka)^{\frac{1}{a}}\right]^{t}=1+K\ ;$$

posons

$$1+Kt=x, \qquad \text{d'où} \qquad t=\frac{x}{K}-\frac{1}{K},$$

$$(1+Ka)^{\frac{K\bar{1}-1}{Ka}}\left[(1+Ka)^{\frac{1}{Ka}}\right]^{x}=x.$$

Posons

$$(1+Ka)^{\frac{1}{Ka}(K\bar{1}-1)}=A, \qquad (1+Ka)^{\frac{1}{Ka}}=B=(1+h)^{\frac{1}{h}};$$

il vient

$$AB^{x}=x \qquad \text{ou} \qquad \frac{x}{A}=[B^{A}]^{\frac{x}{A}}.$$

Posant enfin

$$\frac{x}{a}=y, \qquad B^{A}=C,$$

on est ramené à la forme

$$y=C^{y}, \qquad C=B^{B^{K\bar{1}-1}}.$$

Pour la résolution de ce type d'équations, *voir* 1896, p. 548; 1897, p. 54 : *Sur les racines de l'équation $x=a^{x}$.*

1910.

(1901, p. 95.)

On donne l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

On considère deux génératrices G *et* K *de même système dont les pieds sur le plan de l'ellipse de gorge sont aux extrémités d'un même diamètre :*

1° *Trouver les équations de la droite* Δ *perpendiculaire commune à* G *et* K;

2° *Trouver la surface lieu de* Δ (*conoïde de Plucker*);

3° *Trouver sur cette surface le lieu des points tels que les plans tangents fassent un angle donné* θ *avec le plan de l'ellipse de gorge. Construire les projections de ce lieu sur les plans de coordonnées.* CH. BIOCHE.

Solution
Par un Abonné.

En désignant par φ un paramètre variable, les équations des génératrices G et K sont

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi - \sin\varphi, \qquad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi$$

et

$$\frac{x}{a} = -\frac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi, \qquad \frac{y}{b} = -\frac{z}{c}\sin\varphi - \cos\varphi.$$

Les équations de leur perpendiculaire commune sont

$$\begin{aligned} cax\cos\varphi + cby\sin\varphi + z(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) \\ - c(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi = 0, \\ cax\cos\varphi + cby\sin\varphi - z(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) \\ + c(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi = 0. \end{aligned}$$

On en déduit, en additionnant et retranchant,

$$ax\cos\varphi + by\sin\varphi = 0,$$
$$z(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) - c(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

En éliminant le paramètre φ entre ces deux équations, on obtient, pour la surface engendrée par la perpendiculaire commune, l'équation

$$ab\,z(x^2 + y^2) + c(a^2 - b^2)xy = 0;$$

c'est un conoïde de Plucker.

Désignons par V l'angle que fait la normale à cette surface en un point avec l'axe des z, nous avons

$$\cos^2 V = \frac{a^2 b^2 (x^2+y^2)^2}{\left\{\begin{array}{l} a^2 b^2 (x^2+y^2)^2 + 4a^2 b^2 z^2 (x^2 y^2) \\ \quad + c^2 (a^2 - b^2)^2 (x^2+y^2) + 8abc(a^2-b^2)xyz \end{array}\right\}}.$$

Remplaçons dans cette expression xy par sa valeur tracée de l'équation du conoïde, nous obtenons, après quelques réductions,

$$a^2 b^2 \tang^2 V(x^2 + y^2) + 4a^2 b^2 z^2 - c^2(a^2 - b^2)^2 = 0;$$

ce qui représente une surface du second degré, de révolution autour de l'axe des z. La courbe est l'intersection de cette surface et du conoïde; elle est, par suite, du sixième degré.

Pour obtenir l'équation de sa projection sur le plan des xy, nous tirons de l'équation du conoïde

$$abz = -\frac{c(a^2-b^2)xy}{x^2+y^2},$$

et en portant cette valeur dans l'équation de la surfaee du second degré, nous obtenons

$$a^2b^2\operatorname{tang}^2 V(x^2+y^2)^3 - c^2(a^2-b^2)^2\left\{(x^2+y^2)^2-4x^2y^2\right\} = 0;$$

ou, en passant aux coordonnées polaires ρ et ω,

$$\rho^2 = \frac{c^2(a^2-b^2)^2}{a^2b^2\operatorname{tang}^2 V}\cos^2 2\omega.$$

C'est l'équation d'une rosace.

La projection de la courbe, sur le plan des yz, s'obtient en éliminant x entre les équations des deux surfaces, ce qui ne présente aucune difficulté. On arrive ainsi à l'équation

$$\begin{aligned}16a^4b^4z^6 - a^2b^2c^2(a^2-b^2)^2(8z^4-\operatorname{tang}^4 Vy^4)\\ + 4a^2b^2c^2(a^2-b^2)^2\operatorname{tang}^2 Vy^2z^2\\ + c^4(a^2-b^2)^4(z^2-\operatorname{tang}^2 Vy^2) = 0.\end{aligned}$$

C'est une courbe du sixième degré ayant un point double à l'origine et toutes ses direcfions asymptotiques parallèles à l'axe des y.

L'équation étant du second degré en y^2, on peut la résoudre par rapport à cette inconnue et discuter la courbe par cette méthode. Mais l'équation est trop compliquée pour obtenir des résultats simples et remarquables.

2161.

(1910, p. 336.)

Une pyramide régulière, de sommet S, *a pour base un rectangle* ABCD. *On considère le paraboloïde de révolution de sommet* S *qui passe par le cercle circonscrit au rectangle* ABCD *et le parallélépipède dont ce rectangle* *est la section droite. Démontrer que le solide commun à ces deux corps, limité au plan de base de la pyramide, a un volume double de celle-ci.* M. D'OCAGNE.

DEUXIÈME SOLUTION (1)

PAR UN ABONNÉ.

Soient

$$(\sigma) \qquad y^2 = 4mz$$

la parabole qu'on fait tourner autour de l'axe des z, h la hauteur de la pyramide, r le rayon du cercle ABCD, $2a$ et $2b$ les côtés du rectangle. Alors on a

$$a^2 + b^2 = r^2 = 4mh.$$

La section du paraboloïde par un plan parallèle à l'axe, à la distance $r\sin\theta$, est une parabole égale à (σ). Le plan de base limite cette parabole par une corde de longueur $2r\cos\theta$; l'aire de la section est donc $r^3\cos^3\theta = 3m$, et le volume compris entre deux sections parallèles θ_1, θ_2 est donné par l'intégrale

$$\mathrm{V}(\theta_2, \theta_1) = \frac{r^4}{3m}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^4\theta \, d\theta.$$

Mettons $a = r\sin\alpha$; alors $b = r\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, et le volume demandé est

$$\begin{aligned}
\mathrm{V} &= \mathrm{V}(\alpha, -\alpha) - 2\mathrm{V}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\
&= \frac{2r^4}{3m}\int_0^{\alpha} (\cos^4\theta - \sin^4\theta)\, d\theta \\
&= \frac{r^4}{3m}\sin 2\alpha \\
&= \frac{8abh}{3}.
\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Autre solution, par M. M.-F. EGAN.

---

(1) *Voir* **1911**, p. 288.

2238.

1915, p. 432.

Soient (1), (2), (3), (4) *les quatre côtés d'un quadrilatère complet et* ABC *le triangle formé par les diagonales. Soient* A_1, A_2, A_3, A_4 *les points d'intersection respectifs du côté opposé* BC *avec les parallèles menées du sommet* A *à* (1), (2), (3), (4); *et supposons qu'on forme les points analogues* B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4. *Alors les quatre systèmes de trois points* $A_2B_3C_4$, $A_1B_4C_3$, $A_4B_1C_2$, $A_3B_2C_1$ *sont respectivement en ligne droite* (1'), (2'), (3'), (4') *et ces quatre lignes droites sont parallèles entre elles.*

T. Ono.

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Nous supposerons que les côtés (1) et (2), (3) et (4) sont opposés, et α, β, γ, δ les sommets (1, 4), (1, 3), (3, 2), (2, 4); soit α' l'intersection de $\alpha\delta$ avec BC; menons la droite AA_3 et soit I son intersection avec $\alpha\delta$; le triangle CAA_3, coupé par la transversale $\alpha I \alpha'$, donne

$$\frac{\alpha' C}{\alpha' A_3} \frac{IA_3}{IA} \frac{\alpha A}{\alpha C} = 1;$$

or on a

$$\frac{\alpha' C}{\alpha' A_3} \frac{\gamma C}{\gamma A} \frac{\alpha C}{\alpha A},$$

la division $(\alpha A \gamma C)$ étant harmonique, d'où

$$IA_3 = IA.$$

On en déduit que les trois points A_3, B_2, C_1 sont sur la quatrième tangente commune aux coniques inscrites dans ABC et ayant leurs centres sur (4).

Soit ω le point de BC où se coupent (1) et (2); ce point ω est le centre d'une conique inscrite dans ABC et tangente à $A_1B_4C_3$, $A_2B_3C_4$; si AA_1 coupe (2) en I, AA_2 coupe (1) en I', on a

$$\omega A_1 = \omega A_2 = II',$$

ce qui montre que les droites $A_1B_4C_3$, $A_2B_3C_4$, tangentes menées à une conique par deux points symétriques par rapport au centre de celle-ci et situés sur une asymptote, sont parallèles.

Autre solution par M. J. LEMAIRE.

2260.

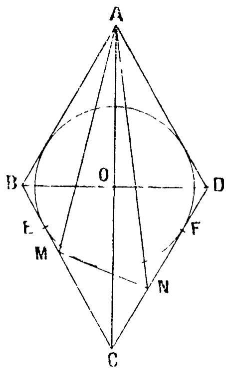
(1915, p. 477.)

On donne un losange ABCD *et le cercle inscrit* O. *Une tangente variable rencontre les côtés* BC *et* CD *en* M *et* N, *entre* B *et* C, C *et* D. *Montrer que l'aire du triangle* AMN *reste constante.* V. THÉBAULT.

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

Si E et F sont les points où CB et CD touchent le cercle O,



nous pouvons écrire

$$
\begin{aligned}
\text{aire AMN} &= \text{aire AECF} - \text{aire AEM} - \text{aire AFN} - \text{aire CMN},\\
&= \text{aire AECF} - 2\,\text{aire OEM} - 2\,\text{aire OFN} - \text{aire CMN},\\
&= \text{aire AECF} - \text{aire OEMNF} - \text{aire CMN},\\
&= \text{aire AECF} - \text{aire OECF} = \text{const.}
\end{aligned}
$$

Autres solutions, par MM. R. BOUVAIST, R. GOORMAGHTIGH, T. ONO et *un Abonné.*

2261.

(1915, p. 477.)

On considère un tétraèdre SABC *trirectangle en* S *et une sphère quelconque* Γ *passant par* A, B, C *et recoupant les arêtes* SA, SB, SC *en* α, β, γ. *Montrer que :*

1° *Le sommet* S, *l'orthocentre du triangle* $\alpha\beta\gamma$, *le point de concours des médianes du triangle* ABC *et le centre* O *de la sphère circonscrite au tétraèdre* SABC *sont en ligne droite ;*

2° *Le sommet* S, *l'orthocentre du triangle* ABC, *le point de concours des médianes du triangle* $\alpha\beta\gamma$ *et le centre* ω *de la sphère circonscrite au tétraèdre* $S\alpha\beta\gamma$ *sont en ligne droite.* V. THÉBAULT.

SOLUTION

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Soient a b, c les milieux de BC, CA, AB; a', b', c' ceux de SA, SB, SC. Les perpendiculaires élevées en a, b, c sur les faces SBC, SCA, SAB concourent au centre O de la sphère SABC. Dans le parallélépipède $Sa'b'c'abcO$, la diagonale OS coupe le plan abc au centre de gravité G du triangle abc, qui est aussi celui du triangle ABC.

Si l'on prend pour centre d'inversion le point S et pour puissance celle de S par rapport à Γ, le plan $\alpha\beta\gamma$ est l'inverse de la sphère SABC ; la droite SGO est donc perpendiculaire à ce plan et renferme, par suite, l'orthocentre du triangle $\alpha\beta\gamma$, puisque le tétraèdre $S\alpha\beta\gamma$ est trirectangle en S.

La proposition du 2° est identique à la première si l'on prend pour tétraèdre fondamental le tétraèdre $S\alpha\beta\gamma$.

Autres solutions, par MM. R. BOUVAIST, T. ONO et *un Abonné*.

2262.

(1915, p. 477.)

Soient D, E, F *les points de contact du cercle inscrit* I *avec* BC, CA, AB, *et* A_1, B_1, C_1 *les milieux des côtés d'un triangle* ABC :

1° *Calculer les distances du point* φ *de Feuerbach aux côtés du triangle ;*

2° *Démontrer la relation*

$$\varphi D \cos\frac{A}{2} = \varphi E \cos\frac{B}{2} + \varphi F \cos\frac{C}{2};$$

3° *Montrer que la perpendiculaire sur* AD *menée du point commun à* B_1C_1 *et* EF *passe au milieu du rayon* ID' *du cercle.* D' *étant l'extrémité du diamètre* DID'.

V. THÉBAULT.

SOLUTION

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

1° Les coordonnées normales relatives du centre de la conique circonscrite $\Sigma\,\dfrac{\alpha}{x} = 0$ sont

$$\alpha(b\beta + c\gamma - a\alpha), \quad \beta(c\gamma + a\alpha - b\beta), \quad \gamma(a\alpha + b\beta - c\gamma);$$

celles du point de Feuerbach φ, centre de l'hyperbole de Feuerbach

$$\Sigma(p-a)(b-c)yz = 0,$$

sont donc

$$\frac{1}{a}(p-a)(b-c)^2, \quad \frac{1}{b}(p-b)(c-a)^2, \quad \frac{1}{c}(p-c)(a-b)^2.$$

En remarquant que

$$\Sigma(p-a)(b-c)^2 = 4\,S(R-2r),$$

on déduit de là comme coordonnées absolues de φ

$$\frac{(p-a)(b-c)^2}{2a(R-2r)}, \quad \frac{(p-b)(c-a)^2}{2b(R-2r)}, \quad \frac{(p-c)(a-b)^2}{2c(R-2r)}.$$

2° La relation proposée exprime que φ appartient au cercle inscrit ; il existe une relation analogue pour tout point de ce cercle. Elle résulte du théorème de Ptolémée, si l'on observe que les côtés du triangle DEF sont proportionnels à

$$\cos\frac{1}{2}A, \quad \cos\frac{1}{2}B, \quad \cos\frac{1}{2}C;$$

la relation proposée suppose que a soit le côté moyen du triangle ABC.

On peut d'ailleurs obtenir aisément des relations analogues à la relation proposée, mais qui ne s'appliquent qu'au point φ. Appelons d, e, f les côtés du triangle DEF ; le point φ étant l'inverse, par rapport au triangle DEF, du point à l'infini dans la direction perpendiculaire à la droite d'Euler OI de ce triangle, les coordonnées normales de φ par rapport au triangle DEF sont

$$\frac{d}{e^2-f^2}, \quad \frac{e}{f^2-d^2}, \quad \frac{f}{d^2-e^2}.$$

D'après une propriété connue, les distances φD, φE, φF sont inversement proportionnelles à ces coordonnées ; on a donc

$$\varphi D : \varphi E : \varphi F = \frac{\cos^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} : \frac{\cos^2\frac{C}{2} - \cos^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} : \frac{\cos^2\frac{A}{2} - \cos^2\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},$$

ou encore

$$\varphi D : \varphi E : \varphi F = \frac{b-c}{\sin\frac{A}{2}} : \frac{c-a}{\sin\frac{B}{2}} : \frac{a-b}{\sin\frac{C}{2}}.$$

On en déduit, par exemple, en supposant encore que a soit le côté moyen,

$$\varphi D \sin\frac{A}{2} = \varphi E \sin\frac{B}{2} + \varphi F \sin\frac{C}{2},$$

$$a\varphi D \sin\frac{A}{2} = b\varphi E \sin\frac{B}{2} + c\varphi F \sin\frac{C}{2},$$

$$\varphi D \cos^3\frac{A}{2} = \varphi E \cos^3\frac{B}{2} + \varphi F \cos^3\frac{C}{2}.$$

3° Soient L et N les milieux de AD et AI, T le point d'intersection des droites EF et B_1C_1, D″ le point où la perpendiculaire menée de T à AD rencontre le diamètre DID′ du cercle inscrit. D'après les théorèmes d'Hamilton et de Mannheim, le point φ est à l'intersection de DT et D′N. Le point D″ étant l'orthocentre du triangle DLT, la droite LD″ est perpendiculaire à DT, et, par suite, parallèle à φD′. Or, si l'on appelle M le point d'intersection de AD avec D′φ, on voit, en considérant le triangle ADI coupé par la transversale MND′, que M est au tiers de AD à partir de A. Il résulte de là que L est au quart de MD à partir de M ; par conséquent, D″ est au quart de D′D à partir de D′, donc au milieu de D′I.

Autres solutions, par MM. R. Bouvaist et T. Ono.