

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 59-65

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__59_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

M. R. Bouvaist. — *Sur la question 546.* — La solution publiée (1916, p. 469) me paraît incomplète : l'auteur admet *a priori* que les transformations dont il est question doivent conserver les points cycliques. Or la normale et la tangente en un point d'une conique sont conjuguées par rapport aux foyers réels et imaginaires de la courbe, il en résulte immédiatement que toute transformation homographique faisant correspondre aux points cycliques les foyers réels ou imagi-

naires fera correspondre, aux normales à la courbe primitive, les normales à la courbe transformée.

En ce qui concerne les quadriques il suffira de même de faire correspondre à l'ombilicale une quelconque des coniques focales.

M. M. Faucheux. — *Une question de Cinématique.*

— Voici un exercice qui sera peut être de nature à intéresser quelques lecteurs des *Nouvelles Annales*.

Si un mobile décrit une trajectoire plane T de telle façon que l'accélération γ coupe le rayon de courbure de la développée Γ de la trajectoire dans un rapport constant, la vitesse est proportionnelle à une puissance du rayon de courbure de la trajectoire. Réciproque. *Cas particuliers.* Soient C et C_1 les centres de courbure de T et Γ , M l'intersection de CC_1 avec γ .

Si

$$CM = CC_1,$$

l'aire balayée par le rayon de courbure de la trajectoire est proportionnelle au temps.

Si

$$CM = - CC_1,$$

la tangente à la trajectoire tourne avec une vitesse angulaire constante.

Si

$$CM = \pm \frac{CC_1}{2},$$

la force vive du mobile est inversement ou directement proportionnelle au rayon de courbure de T

M. G. Fontené. — *Sur la question 1704 bis.* — La solution de cette question (lieu du centre du cercle circonscrit à un triangle ABC qui reste circonscrit à

une conique S , conjugué à une conique Σ , inscrit par suite à une conique S') insérée en 1916, p. 474, avait été rédigée avant l'excellente solution de M. Bouvaist, p. 184, et la Note de la page 355. Je ne soupçonnais pas l'interprétation des conditions qui expriment que le lieu est un cercle, interprétation qui résulte du calcul de M. Bouvaist. Et je n'avais pas encore deviné le sens de la condition qui exprime que le lieu est une droite double.

Mais il y a autre chose. *La représentation paramétrique d'une conique qui est un lieu géométrique ne peut atteindre le cas où le lieu dégénère en un système de deux droites distinctes; elle peut atteindre le cas où le lieu se réduit à une droite double, et aussi le cas où le lieu se réduit à une droite accompagnée de la droite à l'infini du plan.* Je ne pouvais donc, par la méthode employée, atteindre le cas où le lieu se compose de deux droites, d'ailleurs imaginaires; mais j'aurais dû, en outre du cas où le lieu est une droite double, rencontrer le cas où le lieu se réduit à une droite, plus la droite à l'infini. La forme un peu trop particulière donnée à l'équation $\lambda\varphi(t) + \psi(t) = 0$, au bas de la page 475, m'en a empêché. On doit prendre cette équation sous la forme

$$(1) \quad [(A\lambda + B)t - (C\lambda + D)](t^2 + 1) + M\lambda t - 1 = 0,$$

sans faire $M = 1$, et l'on trouve alors, pour les coordonnées d'un point du lieu,

$$x = -\frac{c^2}{a} \frac{AM\lambda^2 + (BM + C)\lambda + D + 1}{M^2\lambda^2 + 1},$$

$$y = -\frac{c^2}{b} \frac{CM\lambda^2 + (DM - A)\lambda - B}{M^2\lambda^2 + 1},$$

avec le facteur M commun aux trois coefficients de λ^2 .

Si M tend vers zéro, le lieu tend à se réduire à une droite, plus la droite à l'infini. Or, avec $M = 0$, si l'on fait λ infini, deux des trois valeurs de t données par l'équation (1) sont i et $-i$, l'un des trois côtés du triangle ABC correspondant est rejeté à l'infini, la conique S est une parabole; c'est le cas 2° de la page 356.

J'ajoute que, d'une manière générale, les formules

$$\frac{x}{a\lambda^2 + b\lambda + c} = \frac{y}{a'\lambda^2 + b'\lambda + c'} = \frac{1}{a''\lambda^2 + b''\lambda + c''}$$

représentent une droite double si l'on a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire si les racines des trois trinômes en λ sont en involution (1); deux valeurs α et β du paramètre λ donnent un même point si elles se correspondent dans cette involution; si l'on pose $\theta = \alpha + \beta$, on peut écrire

$$\frac{x}{a\theta + b} = \frac{y}{a'\theta + b'} = \frac{1}{a''\theta + b''}.$$

On peut écrire encore

$$\frac{x}{mF(\lambda) + n f(\lambda)} = \frac{y}{F(\lambda)} = \frac{1}{f(\lambda)},$$

ou

$$\frac{x}{m \frac{F}{f} + n} = \frac{y}{\frac{F}{f}} = 1;$$

on reconnaît une représentation impropre de la droite,

(1) Cette relation serait encore satisfaite si les trois trinômes en λ avaient une racine commune.

et il y a involution entre les deux valeurs de λ qui donnent un même point.

M. R. Goormaghtigh. — *Sur la parabole tangente à quatre droites* ⁽¹⁾. — L'équation (6) de la Note de M. Barisien à ce sujet (1916, p. 455) ne donne pas trois valeurs pour φ mais *une seule*, comme l'exigent les conditions du problème géométrique. Si l'on multiplie les éléments de la première colonne par $\sin \varphi$ et ceux de la seconde par $\cos \varphi$ et qu'on les ajoute, que d'autre part on multiplie ceux de la première colonne par $\cos \varphi$ et ceux de la seconde par $\sin \varphi$ et qu'on les retranche, on trouve l'équation

$$\begin{vmatrix} m_i & 1 - m_i^2 & p_i(\sin \varphi - m_i \cos \varphi) & 1 + m_i^2 \end{vmatrix} = 0$$

($i = 1, 2, 3, 4$)

ou

$$|p_i(\tan \varphi - m_i) \quad m_i \quad 1 - m_i^2 \quad 1| = 0;$$

on en déduit facilement, en développant le déterminant, la valeur de $\tan \varphi$.

M. R. Goormaghtigh. — *Sur les centres de courbure aux points correspondants de deux courbes polaires réciproques.* — La solution du problème traité par M. Balitrand (1916, p. 461) résulte immédiatement de deux constructions bien connues, si l'on remarque que la polaire réciproque (M_1) de (M) par rapport à un cercle de centre O est l'inverse de la podaire de (M) par rapport à O . En conservant les notations de la figure (p. 461), on aura donc cette construction simple :

(¹) La Rédaction, sur le même sujet, a reçu plusieurs Notes analogues, notamment de MM. EGAN, SER et d'un *Anonyme*.

On projette C en C' sur OM, puis C' en C'' sur MC; la droite OC'' passe au centre de courbure C₁ cherché.

Il est facile d'en déduire d'une part les constructions données par M. Balitrand et d'autre part, au moyen de la considération des triangles semblables OMC'', C₁M₁O, la formule $\rho\rho'\sin^3 V = a^2$ de M. Chemin.

M. M. d'Ocagne. — *Sur le rayon de courbure de la polaire réciproque.* -- La formule attribuée à M. Chemin par M. Balitrand dans une Note récente sur ce sujet (*Nouvelles Annales*, 1916, p. 461) est due à Mannheim (*Journal de Liouville*, 1866, p. 193). Je l'ai déduite à mon tour (*Annales de l'École Normale*, 1887, p. 313) d'une autre relation obtenue d'une façon tellement simple que je crois devoir la rappeler ici.

Si $d\theta$ et $d\theta_1$ sont les angles infiniment petits dont tournent les tangentes en M et en M₁ aux courbes polaires réciproques, OM₁ et OM, respectivement perpendiculaires à ces tangentes, tournent des mêmes angles. Si donc N et N₁ sont les extrémités des sous-normales polaires correspondant à M et M₁, pour lesquels C et C₁ sont les centres de courbure, on a pour les différentielles des arcs décrits par M et M₁,

$$\begin{aligned} ds &= MC \cdot d\theta = MN \cdot d\theta_1, \\ ds_1 &= M_1 C_1 \cdot d\theta_1 = M_1 N_1 \cdot d\theta, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{MC}{MN} = \frac{M_1 N_1}{M_1 C_1}.$$

Telle est la relation que j'avais obtenue, facile à traduire en construction géométrique, et d'où, comme je l'ai fait voir, se déduit immédiatement celle de Mannheim.

Dans la même Note, ci-dessus rappelée, j'ai établi les relations analogues correspondant aux cas où les polaires réciproques sont prises non plus par rapport à un cercle, mais par rapport soit à une conique à centre quelconque, soit à une parabole.