

ADRIEN FAVRE

Sur les fonctions homogènes

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 426-428

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__426_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D6 a]

SUR LES FONCTIONS HOMOGÈNES ;

PAR M. ADRIEN FAVRE.

On définit d'ordinaire les fonctions homogènes de la façon suivante : une fonction de plusieurs variables $f(x, y, z, \dots)$ est dite *homogène* lorsqu'on a

$$(1) \quad f(tx, ty, tz, \dots) = t^\alpha f(x, y, z, \dots),$$

α étant une constante.

On peut chercher à faire rentrer ces fonctions dans un type plus général et à étudier les fonctions jouissant de la propriété qu'exprime l'égalité suivante :

$$(2) \quad f(tx, ty, tz, \dots) = \varphi(t) f(x, y, z, \dots).$$

Or il est aisé de voir que la relation (2) définit simplement les expressions homogènes, autrement dit que la fonction $\varphi(t)$, du moins si on la suppose continue, ne peut être qu'une puissance de t .

En effet, soit $f(x, y, z, \dots)$ une fonction de plusieurs variables satisfaisant à la relation (2). Multiplions les variables indépendantes $x, y, z, \dots$ par $\lambda\mu$. Nous avons successivement :

$$\begin{aligned} f(\lambda\mu x, \lambda\mu y, \lambda\mu z, \dots) &= \varphi(\lambda) f(\mu x, \mu y, \mu z, \dots) \\ &= \varphi(\lambda) \varphi(\mu) f(x, y, z, \dots). \end{aligned}$$

Mais nous avons, d'autre part, immédiatement

$$f(\lambda\mu x, \lambda\mu y, \lambda\mu z, \dots) = \varphi(\lambda\mu) f(x, y, z, \dots);$$

d'où

$$\varphi(\lambda\mu) = \varphi(\lambda) \varphi(\mu),$$

équation fonctionnelle à laquelle satisfait seule la fonction $\varphi(t) = t^z$.

Ce résultat me semble avoir l'intérêt de préciser la notion d'homogénéité des formules de Mécanique et de Physique et d'expliquer d'une façon générale la forme bien connue des équations de dimensions. En effet, étant donnée la mesure d'une grandeur quelconque en fonction d'un système de trois unités fondamentales (longueur, masse et temps, pour fixer les idées), si l'on choisit des unités de longueur, masse et temps, λ, μ, τ fois plus petites sans rien changer aux conventions qui définissent les unités dérivées à partir des unités fondamentales, on conçoit sans peine que la

mesure de la grandeur considérée se trouve multipliée par un nombre fonction de λ , μ , τ . Mais il n'est nullement nécessaire, *a priori*, que cette fonction soit de la forme $\lambda^\alpha \mu^\beta \tau^\gamma$. Au contraire, cela résulte aisément de la proposition établie plus haut. Tout aussi facilement se justifie, à partir de là, la règle connue pour la recherche des équations de dimensions.

Nous nous bornons à cette indication, le développement de ces considérations dépassant le cadre d'une communication.