

F. GONSETH

Sur le centre des moyennes distances d'un groupe de points en ligne droite

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17 (1917), p. 421-426

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__421_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K'9aα]

**SUR LE CENTRE DES MOYENNES DISTANCES D'UN GROUPE
DE POINTS EN LIGNE DROITE ;**

PAR M. F. GONSETH.

1. Dans deux articles (1) parus ici même, j'ai montré que la méthode projective peut s'appliquer à l'étude des groupes de droites qui ont même *orientation*. La même méthode s'applique également à l'étude des groupes de points en ligne droite qui ont le même *centre des moyennes distances*. L'énoncé fondamental est le suivant :

Les groupes de points en ligne droite qui ont même centre des moyennes distances forment un système linéaire dont le point à l'infini, compté doublement, forme une paire neutre.

La démonstration est immédiate. Soient $x_1, \dots, x_n$ les abscisses des points d'un groupe, comptées à partir du centre des moyennes distances. On aura toujours

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0.$$

Les x_i sont donc racines de l'équation

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} + \dots + A_n = 0,$$

dont le second coefficient est nul et les autres arbitraires. Le système de ces groupes est bien *linéaire*.

(1) *Quelques propriétés métriques, etc.*, et *Sur l'orientation d'un groupe de droites*.

Pour tout groupe comprenant le point à l'infini, A_0 est nul. Comme A_1 manque également et que les autres coefficients peuvent être choisis arbitrairement, le point à l'infini, compté doublement, représente une paire neutre.

Le groupe fondamental (des n points où se réunissent tous les n points d'un groupe) *auquel tous les groupes du système sont apolaires*, se réduit au centre des moyennes distances, et au point à l'infini, compté $n - 1$ fois.

2. *a.* Les applications du principe sont immédiates. Toutes les courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre qui ont mêmes asymptotes qu'une courbe C_n forment un système linéaire, le système linéaire de dimension minimale construit sur C_n et toutes les courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre (dégénérées) comprenant la droite de l'infini comptée doublement. Les n asymptotes en sont une courbe particulière.

Les courbes de ce système coupent une droite arbitraire en des groupes de n points qui forment un système linéaire où le point de l'infini, double, est neutre (d'après un raisonnement qui intervient plusieurs fois dans les deux articles cités plus haut), et par conséquent :

Les n points d'intersection d'une courbe C_n par une droite arbitraire ont même centre des moyennes distances que les points d'intersection des n asymptotes de C_n .

Ce qui est un résultat très connu.

Parmi toutes les courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre qui ont les mêmes asymptotes que C_n , il y en a une et par conséquent $\infty^{N(n-3)+1}$ qui coupent une droite arbitraire

en n points réunis au centre des moyennes distances des points d'intersection de C_n . Aucun autre point de la droite ne jouit de la même propriété.

b. Soient C_1 et C_2 deux courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre et soit d une droite qui les coupe, ainsi que toutes les courbes de leur faisceau, en des groupes de points ayant même centre des moyennes distances. Celui de ces groupes qui contient le point à l'infini de la droite ne peut le contenir simplement, car son centre des moyennes distances, et par conséquent celui de tous les groupes, serait lui-même à l'infini, ce qui n'est possible que si les courbes C_1 et C_2 se coupent au point à l'infini de d . En général d sera donc une asymptote d'une courbe du faisceau.

L'enveloppe des droites coupant deux courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre C_1 et C_2 en des groupes admettant même centre des moyennes distances coïncide avec l'enveloppe des asymptotes des courbes du faisceau de C_1 et C_2 .

Cette enveloppe est de la classe $2n - 1$.

3. *a. Nommons homoasymptotiques deux courbes, ou deux surfaces ayant mêmes tangentes en leurs points à l'infini. DANS L'ESPACE, les surfaces homoasymptotiques à une surface donnée F_n forment un système linéaire, le système linéaire de dimension minimale comprenant F_n et toutes les surfaces de $n^{\text{ième}}$ ordre formées du plan double de l'infini, et d'une surface quelconque de $(n - 2)^{\text{ième}}$ ordre.*

Il est facile de vérifier que les surfaces de ce système coupent un plan quelconque suivant un système linéaire de courbes, de dimension $N_2(n - 2) + 1$, qui contient naturellement toutes les courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre

dégénérées en une courbe de $(n - 2)^{\text{ième}}$ ordre et le plan double de l'infini. Par conséquent :

Deux surfaces homoasymptotiques sont coupées par un plan arbitraire suivant deux courbes homoasymptotiques.

Deux surfaces homoasymptotiques sont coupées par une droite arbitraire suivant deux groupes de points qui ont le même centre des moyennes distances.

b. Les droites qui touchent F_n à l'infini forment une congruence. On démontrera comme plus haut que :

Le complexe des droites qui coupent deux surfaces de $n^{\text{ième}}$ ordre suivant deux groupes ayant même centre des moyennes distances coïncide avec le complexe des droites asymptotiques à l'une ou l'autre des surfaces du faisceau des deux premières.

Ce complexe est du degré $(2n - 1)$.

4. L'énoncé fondamental du n° 1 et celui qui joue le même rôle dans l'étude des groupes de droites ayant même orientation ⁽¹⁾ sont deux cas spéciaux de l'énoncé projectif suivant (A, B seront deux points fixes, et P un point arbitrairement fixé) :

Les groupes de points $M_1, \dots, M_n$, d'une droite d, pour lesquels le produit des rapports anharmoniques

$$(M_1 PAB)(M_2 PAB) \dots (M_n PAB)$$

⁽¹⁾ Voir les articles cités.

est constant, forment un système linéaire de dimensions $n - 1$ dans lequel la paire AB est neutre.

La valeur de la constante appartenant à chaque système semblable est une fonction de P. Son logarithme, en supposant que nous nous trouvions dans un espace non euclidien et que A et B soient les deux points à l'infini de d , est égal à la somme des distances non euclidiennes de P aux points M_i .

5. L'analogie des propriétés énoncées ci-dessus avec des propriétés bien connues ⁽¹⁾ des courbes confocales est évidente; les unes sont en réalité les corrélatives des autres. La symétrie, incomplète dans le plan euclidien par le fait que la *conique absolue* doit y être considérée comme formée une fois de la droite double de l'infini et l'autre fois de la paire cyclique, devient parfaite dans le plan non euclidien où la conique absolue n'est pas dégénérée.

Ayant défini comme dans le plan euclidien l'*orientation* d'un groupe de droites par rapport à une droite donnée (avec la différence que dans le cas présent toutes les droites doivent passer par un même point), la notion corrélative sera la somme des distances d'un point P d'une droite à n points $M_1, \dots, M_n$ de la même droite, somme que nous nommerons l'*éloignement* du groupe $M_1, \dots, M_n$.

Nommons, enfin, comme il est naturel, *confocales* deux courbes de même classe qui ont les mêmes tangentes en commun avec la conique absolue Ω , et *foyer* l'intersection de deux pareilles tangentes, *homoasymptotiques* deux courbes de même ordre qui ont mêmes

(¹) Voir les articles cités.

points d'intersection avec Ω , et *droite focale* la droite de jonction de deux points pareils. Il existe deux catégories d'énoncés parallèles, dont la démonstration est inutile, après ce qui précède :

Les groupes de tangentes menées d'un point arbitraire à deux courbes CONFOCALES ont même orientation. Une de ces courbes peut être formée de n foyers indépendants.

Le lieu des points, d'où les groupes de tangentes menées à deux courbes de classe n ont même orientation, coïncide avec le lieu des foyers des courbes du faisceau (tangential) des deux premières.

Les groupes de points d'intersection, par une droite, de deux courbes HOMOASYMPTOTIQUES ont même éloignement. Une de ces courbes peut être formée de n droites focales indépendantes.

L'enveloppe des droites qui coupent deux courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre en deux groupes de même éloignement coïncide avec l'enveloppe des droites focales des courbes du faisceau (ponctuel) des deux premières.

Dans l'espace valent des énoncés semblables faciles à établir.