

A. MYLLER

Sur les surfaces d'égale pente

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 413-420

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__413_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[O'6j]

SUR LES SURFACES D'ÉGALE PENTE ;

PAR M. A. MYLLER.

On désigne sous le nom de *surface d'égale pente* la surface enveloppe d'une famille de cônes de révolution congruents ayant les axes parallèles à une direction fixe et dont les sommets décrivent une courbe directrice donnée.

Parmi ces surfaces, on a étudié spécialement celle qui a comme directrice une conique (¹).

(¹) DE LA GOURNERIE, *Traité de Géométrie descriptive*, t. II. — CREMONA, *Nouv. Ann. de Math.*, 2^e série, t. IV, 1865.

Dans ce qui suit, je m'occuperai de la surface qui a comme directrice une quartique gauche spéciale qui est intersection d'un cylindre et d'un cône de révolution ayant leurs axes parallèles à la direction des axes des cônes générateurs. Je démontrerai que la surface admet, en dehors de la génération donnée, encore deux autres tout à fait analogues.

Les sections de la surface par plans perpendiculaires aux axes des cônes générateurs sont des *courbes parallèles aux ovals de Descartes*. Je montrerai quelques propriétés de ces courbes.

En choisissant convenablement les axes des coordonnées, on peut écrire les équations de la quartique directrice sous la forme suivante :

$$(1) \quad (\xi - k^2 c)^2 + \eta^2 - R^2 = 0,$$

$$(2) \quad k^2 [\xi + (1 - k^2) c]^2 + k^2 \eta^2 - \zeta^2 = 0.$$

On peut supposer pour simplifier, mais sans restreindre la généralité du problème, que le cône générateur est incliné de 45° sur le plan xOy . Son équation sera alors

$$(3) \quad (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - (z - \zeta)^2 = 0,$$

Les coordonnées ξ, η, ζ du sommet satisfont aux équations (1), (2) et le cône engendre par son mouvement la surface d'égale pente.

Cherchons d'abord la nature de la courbe qui est section de la surface par le plan xOy . En faisant dans (3) $z = 0$, on a le cercle générateur de la courbe. Son équation

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - \zeta^2 = 0$$

ensemble avec (1) et (2) montre que *son centre parcourt la circonférence (1) pendant que son rayon ζ ,*

en vertu de l'équation (2), *varie proportionnellement à la distance du centre au point fixe ayant pour coordonnées* — $(1 - k^2)c$ *et 0.*

Si nous notons par φ l'angle que fait Ox avec le rayon du cercle (1) passant par le centre du cercle générateur, on a les coordonnées ξ, η du centre du cercle générateur, le rayon ζ du même cercle et l'équation de ce cercle donnés par les formules

$$\xi = k^2 c + R \cos \varphi,$$

$$\eta = R \sin \varphi,$$

$$\zeta = k \sqrt{[\xi + (1 - k^2)c]^2 + \eta^2} = k \sqrt{R^2 + c^2 + 2cR \cos \varphi},$$

$$(4) \quad x^2 + y^2 - 2(k^2 c + R \cos \varphi)x \\ - 2R \sin \varphi y + (1 - k^2)(R^2 - k^2 c^2) = 0.$$

Pour obtenir l'enveloppe on dérive (4) par rapport à φ et l'on obtient

$$(5) \quad x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0,$$

relation qui représente la corde de contact du cercle (4) avec son enveloppe. En éliminant φ entre (4) et (5), on obtient l'équation de l'enveloppe qui est

$$(6) \quad [x^2 + y^2 - 2k^2 c x \\ + (1 - k^2)(R^2 - k^2 c^2)]^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Ce sont les *ovales de Descartes*. Ce résultat a été établi par Genocchi ⁽¹⁾. Nous allons prouver encore que les ovales (6) peuvent être considérés encore de deux manières comme enveloppe d'un cercle dont le centre parcourt une circonférence et dont le rayon varie proportionnellement à la distance de son centre à un point fixe. Dans ce but, nous établirons d'abord un théorème préliminaire.

(1) *Annali di Matematica*, t. VI, 1864.

Étant donnée une famille de cercles (C) orthogonaux à un cercle fixe (B) et dont les centres se trouvent sur un cercle fixe (A), il y a sur la ligne des centres AB des cercles (A) et (B) deux points P et P' tels que les rayons des cercles (C) soient proportionnels aux distances de leurs centres à un quelconque de ces points. Ces points sont conjugués harmoniques par rapport aux intersections du cercle (A) avec la droite AB.

En effet, soient

$$\xi^2 + \eta^2 - R^2 = 0$$

et

$$(\xi - a)^2 + \eta^2 - r^2 = 0$$

les équations des cercles (A) et (B) et

$$x^2 + y^2 - 2\xi x - 2\eta y + 2a\xi - a^2 + r^2 = 0$$

l'équation du cercle (C).

Cherchons à mettre le rayon

$$\rho = \sqrt{R^2 + a^2 - r^2 - 2a\xi}$$

du cercle (C) sous la forme

$$\rho = k \sqrt{(\xi - \lambda)^2 + \eta^2} = k \sqrt{R^2 + \lambda^2 - 2\lambda\xi}$$

qui exprime que ρ est proportionnel à la distance du point (ξ, η) au point $(\lambda, 0)$. Nous obtenons, en identifiant les deux expressions de ρ , deux valeurs pour λ et deux valeurs correspondantes pour k . Elles sont données par les équations

$$a\lambda^2 - (R^2 + a^2 - r^2)\lambda + aR^2 = 0,$$

$$k^2 = \frac{a}{\lambda}.$$

Revenons maintenant aux ovales (6) de Descartes.

Cette courbe étant une quartique bicirculaire jouit de la propriété de pouvoir être considérée de plusieurs manières comme enveloppe des cercles orthogonaux à un cercle et dont les centres parcourent une conique. En appliquant la théorie connue ⁽¹⁾, que nous ne développons pas ici, au cas particulier de la courbe (6), on constate qu'il existe trois séries de cercles bitangents à la courbe.

Première série. — Cercles orthogonaux au cercle

$$x^2 + y^2 - (1 - k^2)(R^2 - k^2 c^2) = 0,$$

dont le centre parcourt le cercle

$$(x - k^2 c)^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Deuxième série. — Cercles orthogonaux au cercle

$$[x + (1 - k^2)c]^2 + y^2 - (1 - k^2)(c^2 + R^2) = 0,$$

dont le centre parcourt le cercle

$$(x - k^2 c)^2 + y^2 - k^2 R^2 = 0.$$

Troisième série. — Cercles orthogonaux au cercle

$$\left[x + \frac{R^2 - k^2 c^2}{c} \right]^2 + y^2 - \frac{(R^2 - k^2 c^2)(R^2 - c^2)}{c^2} = 0,$$

dont le centre parcourt le cercle

$$(x - k^2 c)^2 + y^2 - k^2 c^2 = 0.$$

En s'appuyant sur notre théorème préliminaire on constate que :

Les cercles de la première série ont leurs rayons

(¹) Voir par exemple F. Gomes TEIXEIRA, *Traité des courbes spéciales remarquables*, t. I, p. 239.

proportionnels aux distances de leurs centres au point

$$x = -(1 - k^2)c, \quad y = 0$$

ou au point

$$x = -\frac{R^2 - k^2 c^2}{c}, \quad y = 0,$$

les coefficients de proportionnalité, c'est-à-dire la quantité par laquelle il faut multiplier la distance pour avoir le rayon, étant respectivement

$$k \quad \text{et} \quad k \frac{c}{R}.$$

Les cercles de la deuxième série ont leurs rayons proportionnels aux distances au point

$$x = 0, \quad y = 0$$

ou au point

$$x = -\frac{R^2 - k^2 c^2}{c}, \quad y = 0,$$

les coefficients de proportionnalité étant

$$\frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \frac{c}{R}.$$

Les cercles de la troisième série ont leurs rayons proportionnels aux distances au point

$$x = 0, \quad y = 0$$

ou au point

$$x = -(1 - k^2)c, \quad y = 0,$$

les coefficients de proportionnalité étant

$$\frac{R}{kc} \quad \text{et} \quad \frac{R}{c}.$$

Notre théorème relatif à la triple génération des ovales par cercles est donc démontré.

Construisons maintenant sur chaque cercle de la

première série d'un côté et de l'autre du plan xOy deux cônes de révolution ayant ce cercle pour base et les génératrices inclinées de 45° sur xOy . On aura alors une première série de cônes générateurs de la surface d'égale pente. Ce sont les cônes (3) dont les sommets décrivent la courbe (1), (2). En faisant la même construction sur les cercles de la deuxième et de la troisième série, on obtient encore deux séries de cônes générateurs de la surface.

Les sommets des cônes de la deuxième série décrivent la quartique gauche

$$\begin{aligned}(\xi - k^2 c)^2 + \eta^2 - k^2 R^2 &= 0, \\ \xi^2 + \eta^2 - k^2 \zeta^2 &= 0,\end{aligned}$$

et les sommets des cônes de la troisième série la quartique

$$\begin{aligned}(\xi - k^2 c)^2 + \eta^2 - k^2 c^2 &= 0, \\ R^2(\xi^2 + \eta^2) - k^2 c^2 \zeta^2 &= 0.\end{aligned}$$

Tous ces cônes sont tangents à la surface d'égale pente le long de deux génératrices dont les projections sur le plan xOy sont normales à la courbe (6). Nous avons ainsi obtenu *la triple génération de la surface d'égale pente par cônes congruents*.

Cherchons la nature de la courbe que nous désignons par S et qui est section de la surface par le plan $z = h$. Par un point M de cette section passe une génératrice de la surface qui coupe le plan xOy en un point P. Projetons orthogonalement la courbe S sur le plan xOy . Soit M' la projection de M. La génératrice PM aura pour projection PM' qui sera une normale aux ovales (6). La longueur PM' sera égale à h . Par conséquent, le lieu du point M' qui est la projection en vraie grandeur de la courbe S s'obtiendra en portant sur les normales

aux ovales (6) à partir de la courbe d'un côté et de l'autre une longueur égale à h . Les sections parallèles au plan xOy seront donc des courbes parallèles aux ovales de Descartes.

Considérons aussi un cône générateur de la surface d'égale pente. Il sera coupé par le plan $z = h$ suivant un cercle (b') qui sera un cercle générateur de la courbe S. A ce cercle correspond un cercle (C) générateur de la courbe (6) qu'on obtient en coupant le même cône par le plan $z = 0$.

Si nous désignons par ρ et ρ' les rayons des cercles (C) et (C') on aura $\rho' = \rho \pm h$. Mais ρ étant proportionnel à la distance d du centre à un point fixe, on a $\rho = \lambda d$. En posant $h = \lambda h'$, on a $\rho' = \lambda(d \pm h')$. L'expression $d \pm h'$ représente la distance (maximale ou minimale) du centre du cercle (C') à un cercle fixe de rayon h' .

Par conséquent, *les courbes parallèles aux ovales de Descartes admettent une triple génération par cercles dont les centres décrivent un cercle fixe et dont les rayons sont proportionnels aux distances des centres à un autre cercle fixe.*

Le cas particulier quand ces courbes deviennent des courbes parallèles au *Limaçon de Pascal* a été étudié par M. O. Losehand ⁽¹⁾ qui a indiqué une des séries de cercles générateurs.

⁽¹⁾ *Mathematische Annalen*, t. LXIV. Voir, dans le même Tome, un article de M. Gino Loria sur le même sujet.