

L. CRELIER

Puissance d'une droite par rapport à un cercle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 339-345

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__339_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K'10e]

PUISSANCE D'UNE DROITE PAR RAPPORT A UN CERCLE ;

PAR M. L. CRELIER.

En dualisant point par point la théorie de la puissance du point par rapport à un cercle, ainsi que celle des axes radicaux de deux cercles, nous sommes amenés à considérer :

- 1° Le cercle comme un lieu de points ;
- 2° Le cercle comme une enveloppe de tangentes ;
- 3° La sécante, passant par un même point ;
- 4° Les points pris sur une même droite ;
- 5° Les points de coupe de diverses sécantes avec le cercle fondamental ;
- 6° Les paires de tangentes du cercle fondamental issues de divers points.

A notre connaissance, ce dualisme fort élémentaire n'a pas été appliqué jusqu'ici d'une manière systématique aux théories qui nous intéressent, et cependant il conduit à quelques résultats intéressants de la théorie des faisceaux de cercles et des involutions correspondantes.

Nous poserons :

$p = OD =$ distance de la droite donnée au centre ;

$a =$ longueur des tangentes issues de A ;

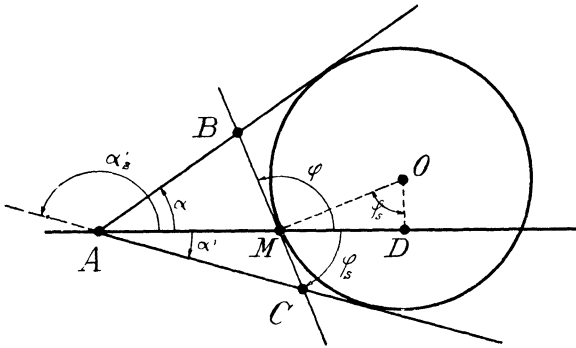
$b =$ longueur des tangentes issues de B ;

..... ;

α = angle de la première tangente avec la droite donnée;
 α' = angle de la deuxième tangente;
 $\alpha_s = \pi - \alpha$; $\alpha'_s = \pi - \alpha'$; ...;
 ρ = angle de la tangente en M avec la droite donnée (fig. 1);
 φ = angle de la tangente par D avec la droite donnée (fig. 2);
 $\varphi_s = \pi - \varphi = \varphi'$.

Nous appellerons *première tangente* par un point celle dont l'angle avec la droite contient le centre du cercle fondamental.

Fig. 1.



Dans le triangle ABM (fig. 1), nous aurons

$$\frac{1}{2} \text{ périmètre} = \frac{a - b + b + t}{2} = \frac{a + t}{2} = s \quad (\text{AM} = t),$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - a + b)(s - t)}{s(s - b)}}$$

et

$$\tan \frac{\varphi_s}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - t)}{s(s - a + b)}}.$$

Dans le triangle AMC (fig. 1), nous aurons également

$$\frac{1}{2} \text{ périmètre} = \frac{a - c + c + t}{2} = \frac{a + t}{2} = s,$$

$$\tan \frac{\alpha'}{2} = \sqrt{\frac{(s - c + c)(s - t)}{s(s - c)}}$$

et

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-t)}{s(s-a+c)}},$$

d'où nous tirons

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} : \operatorname{tang} \frac{\alpha'}{2} = \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} : \operatorname{tang} \frac{\varphi_s}{2} = \sqrt{\frac{(s-a+b)(s-c)}{(s-a+c)(s-b)}}.$$

Mais

$$\operatorname{tang} \varphi_s = \frac{\sqrt{r^2 - p^2}}{p}, \quad \operatorname{tang} \frac{\varphi_s}{2} = \frac{r-p}{\sqrt{r^2 - p^2}}$$

et

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = \frac{r+p}{\sqrt{r^2 - p^2}},$$

puis

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} : \operatorname{tang} \frac{\varphi_s}{2} = \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{r+p}{r-p} = \text{const.}$$

On aura donc

$$(1) \quad \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} : \operatorname{tang} \frac{\alpha'}{2} = \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{r+p}{r-p} = \text{const.}$$

ou

$$(2) \quad \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tang} \frac{\alpha'_s}{2} = \frac{r+p}{r-p}.$$

Les triangles ABD et ACD (*fig. 2*) donnent de la même manière

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} : \operatorname{tang} \frac{\alpha'}{2} = \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} : \operatorname{tang} \frac{\varphi_s}{2} = \sqrt{\frac{(s-a+b)(s-a+c)}{(s-a-b)(s-a-c)}}.$$

On a aussi

$$\operatorname{tang} \varphi_s = \frac{\sqrt{p^2 - r^2}}{r} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = \frac{p+r}{\sqrt{p^2 - r^2}}.$$

Il en résulte

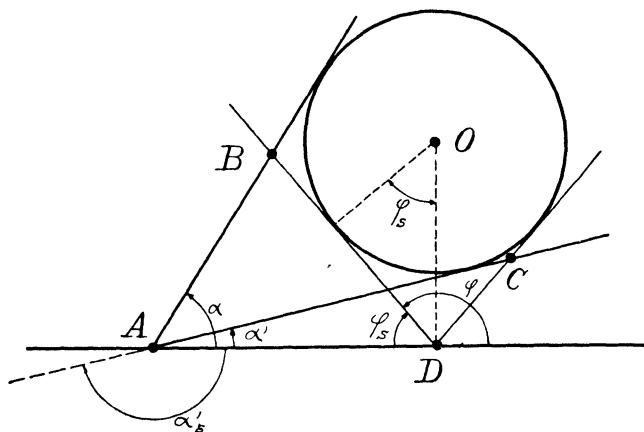
$$(3) \quad \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} : \operatorname{tang} \frac{\alpha'}{2} = \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{p+r}{p-r}.$$

Dans ce cas, les angles α et α'_s sont de signes con-

traires et nous pouvons écrire encore

$$(4) \quad \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\alpha'_s}{2} = \frac{r+p}{r-p}.$$

Fig. 2.



La valeur $\frac{r+p}{r-p}$ s'appellera la *puissance absolue de la droite* par rapport au cercle fondamental. La puissance sera positive dans le premier cas, c'est-à-dire pour les droites sécantes, puisque α et α'_s seront de mêmes signes, tandis qu'elle sera négative dans le second cas, c'est-à-dire pour les droites extérieures, car α et α'_s seront de signes contraires.

Les cas limites seront :

$p = \infty$ et la puissance de la droite de l'infini sera	-1 ;
$p = 2$ et la puissance d'une tangente sera	$+\infty$;
$p = 0$ et la puissance d'un diamètre sera	$+1$;

Les résultats (2) et (4) nous permettent maintenant de formuler le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant donnés tous les couples de tangentes à un cercle que l'on peut mener par les divers points d'une droite quelconque du plan du cercle, les produits des tangentes des demi-angles de la première tangente et du prolongement de la seconde tangente de chaque couple avec la droite donnée est constant.*

Les résultats (1) et (2) auraient donné le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Étant donnés les mêmes couples de tangentes que précédemment, le quotient des tangentes des demi-angles de la première tangente et de la seconde avec la droite donnée est constant.*

Remarque. — A cause de la théorie des involutions qui suivra, l'énoncé du théorème est plus avantageux que celui du corollaire.

Si la puissance d'une droite doit être prise par rapport à plusieurs cercles, nous admettrons que le premier centre fixe l'orientation des signes des distances p_i ($i = 2, 3, 4, \dots$). Suivant la position des autres centres, ces distances p_i peuvent devenir négatives.

Nous appellerons maintenant *puissance relative d'une droite* par rapport à un cercle l'expression $\frac{r+p}{r-p}$ dans laquelle p peut devenir négatif, suivant l'orientation fixée par un autre cercle jouant le rôle de premier cercle fondamental.

Si p reste positif, la puissance relative est égale à la puissance absolue et si p devient négatif, la puissance relative est égale à l'inverse de la puissance absolue; en effet, soit $\bar{p}$ la valeur absolue de p ; la puis-

sance absolue est $\frac{r+\overline{p}}{r-\overline{p}}$, tandis que la puissance relative devient $\frac{r-\overline{p}}{r+\overline{p}}$.

Ces observations nous conduisent aux théorèmes suivants, connus sous une autre forme :

THÉORÈME I. — *L'enveloppe des droites de mêmes puissances relatives par rapport à deux cercles est le premier centre de similitude de ces cercles.*

Soient C_1 et C_2 les deux cercles et $\underline{d}$ une droite dont les puissances relatives par rapport à ces cercles sont égales. Nous aurons

$$\frac{r_1 + p_1}{r_1 - p_1} = \frac{r_2 + p_2}{r_2 - p_2} \quad \text{ou} \quad \frac{r_1}{r_2} = - \frac{p_1}{p_2}.$$

Le rapport des rayons est considéré comme étant toujours positif; celui des distances p_1 et p_2 le sera également. Donc ces distances sont de mêmes signes et nous avons deux figures homothétiques directes avec rapport d'homothétie positif. La droite $\underline{d}$ passe ainsi par le premier centre de similitude.

THÉORÈME II. — *L'enveloppe des droites de puissances relatives inverses par rapport à deux cercles est le deuxième centre de similitude de ces cercles.*

Soit $\underline{d}'_1$ une telle droite. Les puissances relatives nous donnent

$$\frac{r_1 + p_1}{r_1 - p_1} = \frac{r_2 - p_2}{r_2 + p_2} \quad \text{ou} \quad \frac{r_1}{r_2} = - \frac{p_1}{p_2}.$$

Le rapport des rayons étant positif, celui des distances p_1 et p_2 doit devenir négatif à cause du premier signe $-$ qui le précède. Ces distances seront de signes

contraires et nous aurons deux figures homothétiques inverses avec rapport d'homothétie négatif. La droite d' passera alors par le deuxième centre de similitude.

Par analogie avec la nomenclature employée dans la théorie de la puissance du point, nous appellerons les centres de similitude *centre radical principal* et *centre radical secondaire* des deux circonférences.

THÉORÈME III. — *Étant donnés trois cercles dont les centres ne sont pas en ligne droite, les trois centres radicaux principaux sont en ligne droite et les trois centres radicaux secondaires forment un triangle dont chaque côté passe par un des centres radicaux principaux.*

Nous désignerons les centres radicaux principaux par S_1 pour C_2 et C_3 , S_2 pour C_1 et C_3 et S_3 pour C_1 et C_2 ; les centres radicaux secondaires seront S'_1 , S'_2 et S'_3 pour les mêmes groupes.

La droite $S_1 S_2$ est de *mêmes puissances relatives* pour les cercles $C_2 C_3$ et $C_1 C_3$; elle le sera donc pour les cercles C_1 et C_2 et elle passe, par conséquent, par S_3 .

La droite $S'_1 S'_2$ est de *puissances relatives inverses* pour les cercles $C_2 C_3$ et $C_1 C_3$; elle sera donc de mêmes puissances relatives pour C_1 et C_2 , et comme telle elle passera par S_3 . Le raisonnement subsiste pour $S'_1 S'_3$ et $S'_2 S'_3$ qui passent respectivement par S_2 et S_1 .

Nous appellerons maintenant $S_1 S_2 S_3$ *l'axe radical principal des trois cercles*, et les autres droites $S'_1 S'_2 S_3$, $S'_1 S_2 S'_3$, $S_1 S'_2 S'_3$ *axes radicaux secondaires des trois cercles*.