

R. BOUVAIST

Sur deux propositions de Laguerre

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 313-318

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__313_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L¹¹⁴]

SUR DEUX PROPOSITIONS DE LAGUERRE ;

PAR M. R. BOUVAIST.

Je me propose de donner des démonstrations des deux propositions de Laguerre signalées par M. Fontené dans le numéro de juin 1916 des *Nouvelles Annales* (p. 271).

PREMIÈRE PROPOSITION. — *Le cercle pédal d'un point fixe par rapport aux triangles inscrits à une conique et circonscrits à une autre a pour enveloppe une analagmatique du quatrième ordre.*

Désignons par T les triangles inscrits dans une conique (S) et circonscrits à une conique (S') ; deux quelconques de ces triangles sont conjugués à une conique (Σ) , par rapport à laquelle (S) et (S') sont polaires réciproques; les cercles (C) circonscrits aux triangles (T) sont donc orthogonaux au cercle de Monge de (Σ) . Deux de ces cercles et deux seulement se décomposeront à une droite et la droite de l'infini, ce sont ceux qui ont pour un de leurs sommets

les points à l'infini de (S), les côtés opposés seront respectivement les tangentes menées à (S') par le centre de (Σ). Le lieu des centres des cercles (C) sera donc une conique dont les directions asymptotiques seront perpendiculaires aux tangentes menées à (S') du centre de (Σ). En résumé, les cercles (C) enveloppent une analagmatique du quatrième ordre [voir, pour étude analytique de cette question, ma solution de la question proposée 1704^{bis} (*Nouv. Ann.*, 1916, p. 184)].

Ceci posé, on en déduit immédiatement que, par un point quelconque P du plan, passent deux cercles (C), c'est-à-dire que le lieu des centres des coniques admettant par foyer le point P et inscrites aux triangles T, est une conique.

D'autre part, les cercles (C_i) passant par les projections de P sur les côtés des triangles T sont orthogonaux à un cercle fixe, car si l'on transforme par polaires réciproques relativement à un cercle (I') de centre ω le théorème de Fauve, on obtient le suivant :

Étant donné un point fixe ω et une conique (Σ) les cercles passant par les pieds des perpendiculaires abaissées de Σ sur les côtés des triangles conjugués à (Σ), sont orthogonaux à un cercle fixe. La première proposition est donc démontrée.

DEUXIÈME PROPOSITION. — *On considère une ellipse; soient u et v les distances des foyers de l'ellipse au centre du cercle, de sorte que les puissances de ces foyers par rapport au cercle sont*

$$P = u^2 - R^2, \quad P' = v^2 - R^2.$$

Les conditions de fermeture pour un triangle ou un quadrilatère circonscrit à l'ellipse et inscrit au

cercle sont respectivement :

$$PP' = 4b^2 R^2,$$

$$\frac{b^2 R^2}{PP'} + \frac{a^2}{P + P'} = \frac{1}{4}.$$

α. *Cas du triangle.* — Désignons par I et J les points cycliques, par O le centre du cercle, par F et F', φ et φ' les foyers réels ou imaginaires de l'ellipse. Nous obtiendrons la condition cherchée en exprimant que la droite $\alpha\beta$, joignant les points d'intersection du cercle (O) avec les tangentes IF, IF' à l'ellipse, est tangente à cette dernière. Soient Δ et Δ_1 les axes radicaux du cercle O et des foyers F et F', ces droites coupent OF et OF' en K et K', nous obtiendrons les points α et β , en prenant les points d'intersection de Δ et Δ_1 avec les droites obtenues en faisant tourner dans le même sens, le sens direct par exemple, les droites FO, F'O d'un angle dont la tangente sera égale à i .

Si nous désignons s et s' les points d'intersection de $\alpha\beta$ avec FO, F'O, par H le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur $\alpha\beta$, par θ et θ' les angles $\widehat{SOH}$, $\widehat{S'OH}$, et enfin par δ et δ' les perpendiculaires abaissées de F et F' sur $\alpha\beta$, nous aurons

$$\delta = FS \cos \theta = (FK + iFK \tan \theta) \cos \theta = FK e^{i\theta},$$

$$\delta' = F'S' \cos \theta' = (F'K' - iF'K' \tan \theta') \cos \theta' = F'K' e^{-i\theta'},$$

d'où

$$\delta\delta' = FK.F'K' e^{i(\theta - \theta')}.$$

Posons

$$\widehat{\alpha OS} = \varphi, \quad \widehat{\beta OS'} = \varphi';$$

comme $\widehat{\alpha OH} = \widehat{\beta OH}$, nous aurons

$$\theta + \varphi = \theta' - \varphi', \quad \text{d'où} \quad \delta\delta' = FK.FK' e^{-i(\varphi + \varphi')};$$

or

$$R \cos \varphi = OK, \quad R \sin \varphi = iFK;$$

d'où

$$R (\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^{i\varphi} = OK - FK = \frac{R^2}{OF},$$

de même

$$R (\cos \varphi' + i \sin \varphi') = e^{i\varphi'} = OK' - FK' = \frac{R^2}{OF'},$$

d'où enfin

$$\delta\delta' = \frac{FK \cdot FO \cdot F'K' \cdot F'O}{R^2} = \frac{PP'}{4R^2}.$$

Si $\alpha\beta$ touche l'ellipse, on aura

$$\delta\delta' = b^2.$$

d'où

$$PP' = 4b^2 R^2.$$

3. Cas du quadrilatère. — Considérons en général une conique Σ et un point P , deux rayons correspondants d'une involution de sommet P , $\alpha P\beta$, $\gamma P\delta$, coupent la conique Σ en α , β , γ , δ , le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ est inscrit dans une conique Σ' , et le point P a même polaire par rapport à Σ et Σ' . Ce point P est d'ailleurs le point de concours des diagonales de tous les quadrilatères inscrits dans Σ et circonscrits à Σ' .

Dans le cas qui nous occupe, le point de concours fixe des diagonales de tous les quadrilatères inscrits dans le cercle O et circonscrits à l'ellipse donnée, sera le point O intersection $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, ces deux droites étant les cordes d'intersection du cercle O avec les tangentes IF , IF' , JF , JF' à l'ellipse. La polaire du point O par rapport au cercle O est visiblement la droite $R_1 R_2$, R_1 et R_2 étant respectivement les centres radicaux des foyers F et F' et du cercle O , des foyers φ et φ' et du cercle O . Nous obtiendrons donc la condition cherchée

(317)

en écrivant que la droite $R_1 R_2$ a même pôle par rapport au cercle et à l'ellipse.

Soit ω le centre de l'ellipse nous aurons

$$\omega R_1 = \frac{\overline{OO_1}^2 + \overline{OO_2}^2 - R^2 - c^2}{2 \overline{OO_2}},$$

$$\omega R_2 = \frac{\overline{OO_1}^2 + \overline{OO_2}^2 - R^2 + c^2}{2 \overline{OO_1}},$$

O_1 et O_2 étant les projections de O sur ωR_1 , ωR_2 ,

$$\omega R_1 = \frac{\overline{\omega O}^2 - R^2 - c^2}{2 \overline{OO_2}}, \quad \omega R_2 = \frac{\overline{\omega O}^2 - R^2 + c^2}{2 \overline{OO_1}}.$$

La droite $R_1 R_2$ aura même pôle par rapport au cercle et à l'ellipse si l'on a

$$\overline{OO_1} \cdot \omega R_2 - a^2 = \overline{OO_2} \cdot \omega R_1 - b^2 = \frac{R_2}{\frac{\overline{OO_1}}{\omega R_2} + \frac{\overline{OO_2}}{\omega R_1} - 1},$$

conditions qui se réduisent à la suivante :

$$(\overline{\omega O}^2 - R^2 - a^2 - b^2) \left[\frac{\overline{2 \overline{OO_1}^2}}{\overline{\omega O}^2 - R^2 + c^2} + \frac{\overline{2 \overline{OO_2}^2}}{\overline{\omega O}^2 - R^2 - c^2} - 1 \right] = 2 R^2.$$

Si

$$P = \overline{OF}^2 - R^2, \quad P' = \overline{OF'}^2 - R^2,$$

$$P + P' = 2(\overline{\omega O}^2 - R^2 + c^2), \quad P - P' = 4c \cdot \overline{OO_1},$$

$$\overline{OO_1}^2 + \overline{OO_2}^2 = \overline{\omega O}^2, \quad \frac{P + P'}{2} - c^2 = \overline{\omega O}^2 - R^2 - c^2,$$

d'où

$$[P + P' - 4a^2] \left[\frac{\overline{4 \overline{OO_1}^2}}{P + P'} + \frac{\overline{4 \overline{OO_2}^2}}{P + P' - 4c^2} - 1 \right] = 4 R^2,$$

$$(P + P' - 4a^2) [PP' + R^2(P + P')]$$

$$= R^2(P + P')(P + P' - 4c^2),$$

d'où enfin

$$(P + P') PP' = 4a^2 PP' + 4b^2 R^2 (P + P')$$

(318)

ou

$$\frac{1}{4} = \frac{b^2 R^2}{P P'} + \frac{a^2}{P + P'}.$$