

A. AURIC

Note sur la géométrie du triangle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 22-34

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__22_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K'2e]

NOTE SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE ;

PAR M. A. AURIC.

Généralités. — La géométrie du triangle n'est en somme qu'un chapitre spécial de la Géométrie analytique, et il semble tout indiqué de prendre le triangle donné comme triangle de référence, en faisant un usage exclusif des coordonnées trilinéaires barycentriques.

Il est incontestable, en effet, qu'un choix judicieux de définitions, de notations et de symboles peut faciliter beaucoup, non seulement l'exposition didactique de théorèmes déjà connus, mais aussi la recherche de nouvelles propriétés concernant les figures soi-disant remarquables d'un triangle, telles que points, droites, coniques, etc.

Considérons donc le triangle de référence $A_1 A_2 A_3$ et appelons m_1, m_2, m_3 les coordonnées barycentriques d'un point M , défini par certaines propriétés *intrinsèques* que ce point possède dans le triangle $A_1 A_2 A_3$; en d'autres termes, nous admettons que ce point peut être obtenu en effectuant certaines opérations au moyen des côtés a_1, a_2, a_3 ou des angles A_1, A_2, A_3 du triangle de référence.

Dans ces conditions, comme le côté a_i est proportionnel à $\sin A_i$, la coordonnée m_i sera proportionnelle à une fonction bien déterminée des angles A_1, A_2, A_3

$$m_i = k f(A_1, A_2, A_3).$$

Au moyen de la relation

$$A_1 + A_2 + A_3 = \pi,$$

on pourra éliminer A_3 et il viendra

$$m_1 = k \varphi(A_1, A_2).$$

A cette coordonnée, on peut faire correspondre la coordonnée conjuguée

$$m'_1 = k' \varphi(A_1, A_3),$$

qui différera en général de m_1 , à moins que l'on ait

$$\varphi(A_1, A_2) = k'' \varphi(A_1, A_3),$$

k'' étant une constante indépendante de A_1, A_2, A_3 ou une fonction symétrique par rapport à ces trois angles. On dira dans ce cas que la coordonnée m_1 coïncide avec sa conjuguée m'_1 et l'on écrira

$$m_1 = k \varphi_s(A_1, A_2) = k \varphi_s(A_1, A_3).$$

Enfin, il peut arriver que m_1 se réduise à une fonction de A_1 seulement, soit

$$m_1 = k \psi(A_1).$$

Considérons d'abord le cas où les coordonnées m_2, m_3 se déduisent de m_1 par une simple permutation circulaire des *angles*; nous obtiendrons les classes suivantes de points :

- | | | | |
|-------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| (I) | $\psi(A_1)$ | $\psi(A_2)$ | $\psi(A_3),$ |
| (II) | $\varphi_s(A_1, A_2)$ | $\varphi_s(A_2, A_3)$ | $\varphi_s(A_3, A_1),$ |
| (III) | $\varphi(A_1, A_2)$ | $\varphi(A_2, A_3)$ | $\varphi(A_3, A_1).$ |

La classe (I) contient les points M dont les coordonnées s'expriment *explicitement* au moyen d'une même fonction des angles correspondants

$$m_i = \psi(A_i).$$

(24)

Si un point N a pour coordonnées n_i avec

$$n_i = f[\psi(A_i)] = f(m_i),$$

on pourra écrire symboliquement

$$N = f(M).$$

En particulier, si $\psi(A_i)$ est une fonction rationnelle des lignes trigonométriques ordinaires de l'angle A_i , $\sin A_i$, $\cos A_i$, et de ses multiples, on sait qu'on pourra l'exprimer rationnellement en fonction de

$$\text{tang } \frac{A_i}{2}.$$

Or, le point de Gergonne L, obtenu en joignant chaque sommet du triangle au point de contact du cercle inscrit avec le côté opposé, a précisément pour coordonnées

$$\lambda \text{ tang } \frac{A_1}{2}, \quad \lambda \text{ tang } \frac{A_2}{2}, \quad \lambda \text{ tang } \frac{A_3}{2}.$$

Dès lors, on pourra, dans beaucoup de cas, exprimer rationnellement un point $\frac{M}{\mu}$ en fonction explicite de $\frac{L}{\lambda}$.

En particulier, l'orthocentre H, les centres des cercles inscrit I et circonscrit O peuvent s'écrire symboliquement

$$\begin{aligned} \frac{H}{\mu} &= (\text{tang } A_i) = \frac{2L\lambda}{\lambda^2 - L^2}, \\ \frac{I}{\mu} &= (\sin A_i) = \frac{2L\lambda}{\lambda^2 + L^2}, \\ \frac{O}{\mu} &= (\sin A_i \cos A_i) = \frac{2L\lambda(\lambda^2 - L^2)}{(L^2 + \lambda^2)^2}. \end{aligned}$$

Pour les points de la classe (II), nous avons

$$m_i = k \varphi_s(A_1, A_2) = k' \varphi_s(A_1, A_3).$$

Au moyen de la relation

$$A_1 + A_2 + A_3 = \pi,$$

nous pouvons éliminer A_2 et A_3 et nous obtiendrons comme résultant

$$\chi(m_1, A_1) = 0.$$

On obtiendrait évidemment de la même manière

$$\chi(m_2, A_2) = \chi(m_3, A_3) = 0,$$

m_i est ici une fonction *implicite* de A_i et se comporte comme un nombre algébrique ou transcendant, selon que χ est une fonction algébrique ou transcendante en m_i .

Nous pourrions donc, dans beaucoup de cas, assimiler un point M de cette classe à un nombre algébrique, racine d'une équation irréductible, et associer à M les autres points, réels ou imaginaires, également racines de cette équation.

Pour la classe (III), nous associerons à la coordonnée

$$m_1 = \varphi(A_1, A_2),$$

la coordonnée conjuguée

$$m'_1 = \varphi(A_1, A_3).$$

Toute fonction symétrique de m_1 et m'_1 sera évidemment de la forme $\varphi_s(A_1, A_2)$, et appartiendra par conséquent à la classe (II); en particulier, la somme $m_1 + m'_1$ et le produit $m_1 m'_1$ appartiendront à cette dernière classe : dès lors, m_1, m'_1 pourront être considérés comme les racines d'une équation du second degré dont les termes seront des coordonnées appartenant à la classe (II); symboliquement, il en sera de même des points correspondants.

Dans beaucoup de cas, les points de la troisième

classe seront donc des points algébriques de degré $2h$, h étant le degré des points de la deuxième classe auxquels ils peuvent être ramenés.

Si les coordonnées m_2, m_3 ne se déduisent pas de m_1 par une simple permutation circulaire des *angles*, on obtiendra les classes suivantes de points :

$$\begin{array}{lll} \text{(IV)} & \psi_1(A_1) & \psi_2(A_2) \quad \psi_3(A_3), \\ \text{(V)} & \varphi_{s_1}(A_1, A_2) & \varphi_{s_2}(A_2, A_3) \quad \varphi_{s_3}(A_3, A_1), \\ \text{(VI)} & \varphi_1(A_1, A_2) & \varphi_2(A_2, A_3) \quad \varphi_3(A_3, A_1). \end{array}$$

Considérons un point de la classe (IV), par exemple

$$\text{(M)} \quad \psi_1(A_1) \quad \psi_2(A_2) \quad \psi_3(A_3).$$

Nous associerons à ce point les points obtenus par une permutation circulaire des *fonctions* ψ_i , qui ici sont différentes,

$$\begin{array}{lll} \text{(M')} & \psi_2(A_1) & \psi_3(A_2) \quad \psi_1(A_3), \\ \text{(M'')} & \psi_3(A_1) & \psi_1(A_2) \quad \psi_2(A_3). \end{array}$$

Toute fonction symétrique des coordonnées de ces trois points M, M', M'' donnera pour chaque coordonnée une même fonction de l'angle correspondant : en d'autres termes, on obtiendra les coordonnées d'un point appartenant à la classe (I); on en déduira, comme précédemment, que les points M, M', M'' se comportent comme des nombres algébriques, racines d'une équation du troisième degré, dont les coefficients sont des points appartenant à la première classe.

Les classes (V) et (VI) se ramèneront de la même manière aux classes (II) et (III); on pourra, par exemple, associer au point

$$\varphi_{s_1}(A_1, A_2), \quad \varphi_{s_2}(A_2, A_3), \quad \varphi_{s_3}(A_3, A_1)$$

les deux points

$$\varphi_{s_2}(A_1, A_2), \quad \varphi_{s_2}(A_2, A_3), \quad \varphi_{s_1}(A_3, A_1), \\ \varphi_{s_2}(A_1, A_2), \quad \varphi_{s_1}(A_2, A_3), \quad \varphi_{s_2}(A_3, A_1)$$

et raisonner comme précédemment. Les points des classes (V) et (VI) se comporteront donc comme des nombres algébriques de degré $3h$ ou $6h$, si h est le degré des points algébriques de la deuxième classe auxquels ils peuvent être ramenés.

Finalement, on pourra dire que tout point remarquable du triangle est susceptible d'être défini par une fonction implicite irréductible

$$f(m_i, A_i) = 0$$

et l'étude de ces points remarquables sera ainsi ramenée à celle des nombres algébriques ou transcendants. On remarquera l'importance et la grande généralité de ce résultat.

Points remarquables. — Parmi les points remarquables du triangle, il faut citer en premier lieu ceux dont les coordonnées s'expriment au moyen des *côtés mêmes* du triangle de référence, considérés comme des vecteurs du plan

$$(I) \quad a_1 e^{i\theta_1}, \quad a_2 e^{i\theta_2}, \quad a_3 e^{i\theta_3}, \\ (J) \quad a_1 e^{-i\theta_1}, \quad a_2 e^{-i\theta_2}, \quad a_3 e^{-i\theta_3},$$

a_i et θ_i étant les modules et les arguments de ces côtés. Les points ainsi obtenus sont situés sur la droite de l'infini

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

et s'appellent les *points cycliques* du plan : on connaît le rôle important qu'ils jouent, soit dans la mesure des distances, soit dans les propriétés des circonférences.

Ainsi la distance de deux points $M(m_1, m_2, m_3)$, $N(n_1, n_2, n_3)$ est donnée par l'expression

$$(m_1 + m_2 + m_3)(n_1 + n_2 + n_3)MN = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ a_1 e^{i\theta_1} & a_2 e^{i\theta_2} & a_3 e^{i\theta_3} \end{vmatrix}$$

de même la distance δ du point M à la droite

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$$

est donnée par l'expression

$$\delta = \frac{2A_1 A_2 A_3}{m_1 + m_2 + m_3} \frac{p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3}{p_1 a_1 e^{i\theta_1} + p_2 a_2 e^{i\theta_2} + p_3 a_3 e^{i\theta_3}}.$$

Les points (I) et (J) représentent en quelque sorte, sur la droite de l'infini, les triangles semblables au triangle de référence : on pourrait considérer d'autres triangles dérivant de ce dernier, par exemple ceux dont les angles sont

$$\pi - 2A_1, \quad \pi - 2A_2, \quad \pi - 2A_3$$

ou

$$\frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{A_2}{2}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{A_3}{2},$$

ou, plus généralement,

$$k\pi + (1 - 3k)A_1, \quad k\pi + (1 - 3k)A_2, \quad k\pi + (1 - 3k)A_3.$$

En considérant les triangles équilatéraux, on aurait comme points représentatifs

$$G_1(1, j, j^2) \quad \text{et} \quad G_2(1, j^2, j),$$

j et j^2 étant les racines cubiques de l'unité.

Il n'est pas possible de rappeler ici les nombreux points remarquables à titres divers étudiés dans le triangle : nous nous contenterons d'en définir les racines carrées et cubiques.

Si l'on considère le point $M^3(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$, on dira qu'il a pour racines carrées les quatre points

$$\begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1 & -m_2 & m_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{array}$$

On peut associer à chacune de ces racines la polaire trilinéaire correspondante

$$\frac{x_1}{\pm m_1} + \frac{x_2}{\pm m_2} + \frac{x_3}{\pm m_3} = 0.$$

On voit aisément que le triangle formé par trois points racines, celui formé par les trois polaires trilinéaires correspondantes et le triangle de référence sont homologues, le centre et l'axe d'homologie étant précisément la quatrième racine et sa polaire trilinéaire.

Si l'on considère le point $M^3(m_1^3, m_2^3, m_3^3)$, on voit qu'il a neuf racines cubiques que l'on peut répartir en trois triangles comme il suit :

$$\begin{array}{ccc} m_1, m_2, m_3 & m_1 j, m_2, m_3 & m_1 j^2, m_2, m_3 \\ m_1, m_2 j, m_3 j^2 & m_1, m_2 j, m_3 & m_1, m_2 j^2, m_3 \\ m_1, m_2 j^2, m_3 j & m_1, m_2, m_3 j & m_1, m_2, m_3 j^2 \end{array}$$

Ces trois triangles forment avec le triangle de référence un groupe tel que deux triangles quelconques du groupe sont hexahomologiques entre eux, les centres et les axes d'homologie étant précisément les sommets et les côtés des deux autres triangles.

Avant de passer à l'examen des courbes dérivant de points remarquables, nous allons dire un mot des points qu'on peut faire dériver de deux ou de trois points donnés.

Par exemple, des deux points $m_1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3$,

on peut déduire les deux points brocardiens

$$m_2 n_3 \pm m_3 n_2, \quad m_3 n_1 \pm m_1 n_3, \quad m_1 n_2 \pm m_2 n_1.$$

Si l'on a trois points

$$\begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{array}$$

on peut en déduire de nouveaux points, soit en changeant, dans le déterminant représentatif, les lignes en colonnes et réciproquement, soit en remplaçant chaque élément par le mineur correspondant.

On est ainsi conduit à des triples points de la forme

$$\begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_3 & m_1 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{array}$$

qui restent invariables par une permutation circulaire, et au déterminant représentatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} m_1 n_1 - m_2 n_2 - m_3 n_3 & 2 n_1 n_2 & 2 m_3 m_1 \\ 2 m_1 m_2 & m_2 n_2 - m_3 n_3 - m_1 n_1 & 2 n_2 n_3 \\ 2 n_3 n_1 & 2 m_2 m_3 & m_3 n_3 - m_1 n_1 - m_2 n_2 \end{array}$$

dont les mineurs sont proportionnels aux éléments correspondants si l'on a la relation

$$m_1 m_2 m_3 = n_1 n_2 n_3 ;$$

cette égalité signifie que le triple point forme un triangle homologique avec le triangle de référence.

Lorsque les deux points M et N sont confondus, on a le triple point

$$\begin{array}{ccc} m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 & 2 m_1 m_2 & 2 m_3 m_1 \\ 2 m_1 m_2 & m_2^2 - m_3^2 - m_1^2 & 2 m_2 m_3 \\ 2 m_3 m_1 & 2 m_2 m_3 & m_3^2 - m_1^2 - m_2^2 \end{array}$$

qui représente le discriminant d'une conique, dont l'équation reste la même, soit en coordonnées ponctuelles, soit en coordonnées tangentielles.

Courbes remarquables. — Parmi les courbes dérivant d'un point remarquable M , nous citerons tout d'abord celles dont l'équation est

$$\left(\frac{x_1}{m_1}\right)^\alpha + \left(\frac{x_2}{m_2}\right)^\alpha + \left(\frac{x_3}{m_3}\right)^\alpha = 0.$$

Pour $\alpha = 1$, on obtient la polaire trilinéaire de M , dont les propriétés sont bien connues.

Pour $\alpha = 2$, on a une conique dont les points d'intersection avec les côtés de $A_1 A_2 A_3$ sont conjugués harmoniques par rapport aux sommets A_i et que, pour cette raison, on appelle *conique conjuguée*.

Le centre de cette conique est en $M^2(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$: elle est une parabole si

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 0;$$

une hyperbole équilatère si

$$\frac{a_1^2}{m_1^2} + \frac{a_2^2}{m_2^2} + \frac{a_3^2}{m_3^2} = 0;$$

un cercle si

$$m_i = \tan A_i.$$

Pour $\alpha = -1$, on obtient une conique *circonscrite* au triangle de référence : son centre a pour coordonnées

$$m_1(m_2 + m_3 - m_1), \quad m_2(m_3 + m_1 - m_2), \quad m_3(m_1 + m_2 - m_3);$$

cette conique est une parabole si

$$\sqrt[2]{m_1} + \sqrt[2]{m_2} + \sqrt[2]{m_3} = 0;$$

une hyperbole équilatère si

$$\frac{m_1}{\tan A_1} + \frac{m_2}{\tan A_2} + \frac{m_3}{\tan A_3} = 0;$$

un cercle si

$$m_i = \sin^2 A_i.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient une conique *inscrite* dans le triangle de référence et dont le centre a pour coordonnées

$$\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}, \quad \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1}, \quad \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Cette conique est une parabole si

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = 0;$$

une hyperbole équilatère si

$$\frac{a_1^2}{m_1^2} + \frac{a_2^2}{m_2^2} + \frac{a_3^2}{m_3^2} - 2 \frac{a_2 a_3}{m_2 m_3} \cos A_1 - 2 \frac{a_3 a_1}{m_3 m_1} \cos A_2 - \frac{a_1 a_2}{m_1 m_2} \cos A_3 = 0;$$

un cercle si

$$m_i = \tan \frac{A_i}{2}.$$

Pour $\alpha = 3$, on a une cubique non singulière dont la hessienne est formée par les côtés de $A_1 A_2 A_3$ qui sont des tangentes inflexionnelles à la cubique : les points de contact se trouvent sur la polaire trilinéaire de M.

Pour $\alpha = \frac{1}{3}$, on a une cubique ayant un point double en M et les tangentes inflexionnelles comme dans le cas précédent.

Pour $\alpha = 4$, $\alpha = -2$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient des quar-

tiques qui ont été étudiées par de nombreux géomètres.

On pourrait définir de nouvelles courbes comme lieux géométriques des centres ou des foyers de coniques satisfaisant à certaines conditions : il nous suffira de rappeler les notions très fécondes de *faisceaux* et de *réseaux* de courbes qui constituent des combinaisons linéaires de *deux* ou de *trois* courbes données.

Considérons, par exemple, le faisceau obtenu avec une conique conjuguée et une conique circonscrite

$$\sum \frac{x_1^2}{m_1^2} + \lambda \sum \frac{x_2 x_3}{n_2 n_3} = 0.$$

Le discriminant de cette équation aura une racine double; en d'autres termes, toutes les coniques du faisceau seront tangentes si l'on a

$$\left(\frac{n_1}{m_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{n_2}{m_2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{n_3}{m_3}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Lorsque $m_i = n_i$, toutes les coniques du faisceau sont bitangentes et l'on détermine facilement la valeur de λ pour laquelle la conique est une parabole, une hyperbole équilatère, une conique inscrite dans $A_1 A_2 A_3 \dots$.

On pourrait étudier également le faisceau des coniques bitangentes à une conique inscrite dans $A_1 A_2 A_3$ au nombre desquelles se trouve la *lemoiennienne*, généralisation du premier cercle de Lemoine : de même que le faisceau formé par deux coniques inscrites dans $A_1 A_2 A_3$ au nombre desquelles se trouve l'*eulérienne*, généralisation du cercle des neuf points, etc.

Parmi les coniques d'un réseau, on étudiera surtout

celles qui sont conjuguées, circonscrites ou inscrites à un triangle déterminé. Ce triangle peut être obtenu, soit en prenant trois des racines carrées d'un point M^2 (coniques de de Longchamps), soit en prenant un des trois triangles formés par les neuf racines cubiques de M^3 (brocardiennes ou généralisation du cercle de Brocard).

Ces indications sommaires suffiront à montrer l'immense complexité des propriétés des points et des figures soi-disant remarquables dont l'étude fait l'objet de la Géométrie du triangle.