

JOSEPH JOFFROY

Seconde note sur le problème de Pappus généralisé

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 177-180

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__177_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K' 1]

SECONDE NOTE
SUR LE PROBLÈME DE PAPPUS GÉNÉRALISÉ;

PAR M. JOSEPH JOFFROY,
Professeur honoraire.

Pour l'intelligence des courtes observations qui suivent, il est nécessaire de se reporter à l'article publié par moi, en avril 1916 (p. 168-171), et à la figure qui l'accompagne.

En supposant droit l'angle $XOY = \omega$ et cherchant $OS = x$ qui déterminera la droite $SS_1 = l$ inscrite dans l'angle et passant par le point P de la bissectrice dont les coordonnées sont $OA = a$, $OB = a$, on obtient

$$(E_1) \quad x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - l^2)x^2 + 2al^2x - a^2l^2 = 0.$$

Dans les Traités d'Algèbre on déclare que l'équation (E_1) ne peut pas être résolue par des expressions calculables, et l'on cherche une inconnue autre que OS . Je vais prouver que, en résolvant (E_1) par la méthode générale connue, on obtient ses racines sous une forme permettant de les calculer et de les construire.

Pour résoudre

$$(F) \quad X^4 + AX^2 + BX + C = 0,$$

on a (voir l'Algèbre de Briot)

$$X^2 + pX + q = 0, \quad X^2 - pX + A + p^2 - q = 0,$$

$$q = \frac{p(A + p^2) - B}{2p}, \quad p^2 = z,$$

$$z^3 + 2Az^2 + (A^2 - 4C)z - B^2 = 0.$$

D'abord je mets (E₁) sous la forme (F) en remplaçant x par $X + h = X + \frac{a}{2}$; elle devient

$$X^4 + \frac{a^2 - 2l^2}{2} X^2 + a(a^2 + l^2)X + \frac{5a^4 - 4a^2l^2}{16} = 0,$$

et l'équation en z devient

$$z^3 + (a^2 - 2l^2)z^2 + (l^4 - a^4)z - a^2(a^2 + l^2)^2 = 0.$$

Le produit de ses racines étant $a^2(a^2 + l^2)^2$, j'ai l'idée de mettre à la place de z le facteur $a^2 + l^2$, et je constate que l'équation est satisfaite. La somme des deux autres racines est

$$2l^2 - a^2 - (a^2 + l^2) = l^2 - 2a^2;$$

leur produit est

$$\frac{a^2(a^2 + l^2)^2}{a^2 + l^2} = a^2(a^2 + l^2);$$

elles valent donc

$$\frac{l^2 - 2a^2 \pm \sqrt{l^4 - 8a^2l^2}}{2}.$$

Pour $z = a^2 + l^2$, j'ai

$$p^2 = z, \quad p = \pm \sqrt{a^2 + l^2}.$$

Je suppose $p = +\sqrt{a^2 + l^2}$; q est alors déterminé, et je résous les équations

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 - px + A + p^2 - q = 0$$

dont les racines X sont celles de (E_2) .

Celles de E_1 sont donc

$$x = X + \frac{a}{2}.$$

Théorème relatif au problème tout à fait général. — Le point P quelconque dans l'angle $XOY = \omega$ a pour coordonnées $OA = a$, $OB = b$; $SS' = l$ est la droite qu'il faut inscrire.

Je cherche $AS = x$, $BS_1 = y$:

La figure donne

$$\frac{y + b}{b} = \frac{x + a}{x},$$

$$(y + b)^2 + (x + a)^2 - 2(x + a)(y + b)\cos\omega = l^2.$$

Éliminant y , j'obtiens

$$(J) \quad x^4 + 2(a - b\cos\omega)x^3 + (a^2 + b^2 - 4ab\cos\omega - l^2)x^2 \\ + 2ab(b - a\cos\omega)x + a^2b^2 = 0.$$

Soient S , S' , S'' , S''' les points des quatre droites l (inscriptibles dans XOY) situées sur OX : les valeurs de x , racines de (J) , sont celles de $+AS$, $+AS'$, $-AS''$, $-AS'''$: leur produit vaut a^2b^2 , dernier terme de (J) , il ne change donc pas quand l change, ni la somme des produits de trois de ces longueurs, laquelle vaut $-2ab(b - a\cos\omega)$, ni la somme de ces longueurs qui vaut $2(-a + b\cos\omega)$.

Soient S_1 , S'_1 , S''_1 , S'''_1 les points des quatre droites l inscrites qui sont sur OY : leurs distances au point B de OY donnent lieu aux mêmes propriétés ci-dessus, Leur produit est le même quelle que soit la grandeur

de l ; de plus, *il est égal au produit ci-dessus*, égal à $a^2 b^2$, ce qui est remarquable (on voit bien que l'équation en x devient l'équation donnant y si l'on change x en y , a en b et b en a).