

D'OCAGNE

Sur le mouvement de la manivelle et de la tige guidée

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 121-125

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__121_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

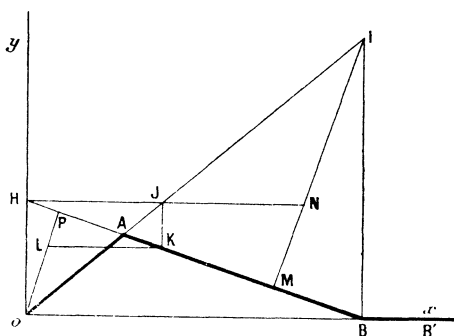
[R1e]

**SUR LE MOUVEMENT DE LA MANIVELLE
ET DE LA TIGE GUIDÉE;**

PAR M. D'OCAGNE.

Soit BB' (*fig. 1*) une tige guidée, glissant le long de Ox , dont l'extrémité B est reliée au bouton A de la

Fig. 1.



manivelle OA tournant autour de O avec une vitesse angulaire ω constante. Il s'agit de trouver *le maximum de la vitesse du point B*. Ce problème est résolu analytiquement dans l'excellent *Cours de Mécanique* de M. Lecornu (t. I, p. 182). Le savant auteur aboutit (p. 183) à une équation du troisième degré de forme assez compliquée dont il indique, au reste, une solution approchée pour le cas, conforme aux dispositions de la pratique, où la longueur de la bielle atteint cinq fois environ celle de la manivelle.

Je me propose de faire connaître ici une solution géométrique du même problème qui, grâce à un choix différent de l'inconnue (l'inclinaison de la bielle au lieu de celle de la manivelle sur la tige), aboutit à un résultat de forme très simple. J'emploie d'ailleurs les mêmes notations que M. Lecornu en posant

$$OA = r, \quad AB = l, \quad \frac{OA}{AB} = e, \quad ABO = \varphi$$

et représentant par v la vitesse du point B.

Si l'on prend le centre instantané I de AB, à la rencontre de OA et de la perpendiculaire élevée en B à OB, on a immédiatement, puisque la vitesse de A est $r\omega$,

$$\frac{v}{r\omega} = \frac{BI}{AI};$$

d'où, si AB coupe Oy en H,

$$v = OH \omega.$$

résultat depuis longtemps classique. Puisque ω est constant, le maximum de v a lieu en même temps que celui de OH, c'est-à-dire pour la position telle que la différentielle $d(H)$ du déplacement de H sur Oy s'annule.

Si la normale en H au lieu que décrit ce point (perpendiculaire en H à Oy) coupe en N la normale à l'enveloppe de AB (perpendiculaire abaissée de I sur AB), on a, en vertu d'une formule bien connue,

$$\frac{d(H)}{d(A)} = \frac{HN}{AI}$$

ou, en remplaçant $d(A)$ par sa valeur $r\omega dt$,

$$d(H) = \frac{OA \cdot HN}{AI} \omega dt.$$

Tirons la perpendiculaire JK à O*x*. La figure OHJK est homothétique de IBOH pour le pôle A, le rapport d'homothétie étant $\frac{OA}{AI}$. Si donc nous menons OP perpendiculaire à AB, puis KL perpendiculaire à O*y*, ces deux lignes, prises dans la première figure, sont homologues respectivement de OH et HN, prises dans la seconde, et nous avons

$$\frac{KL}{HN} = \frac{OA}{AI},$$

ce qui montre que

$$d(H) = KL \cdot \omega \, dt.$$

On déduit immédiatement de là que l'accélération du point B, donnée par $\frac{d(H)}{dt} \omega$, est égale à $KL\omega^2$, résultat établi d'une autre façon dans mon Cours de Géométrie de l'École Polytechnique (voir notamment les *Feuilles autographiées* de la deuxième division 1912-1913, p. 494). Mais, pour l'objet qui nous occupe ici, il suffit de remarquer que *la position correspondant au maximum de v , pour laquelle, nous venons de le dire, $d(H) = 0$ est celle qui est telle que $KL = 0$, c'est-à-dire telle que le point K se confonde avec le pied P de la perpendiculaire abaissée de O sur AB.*

Refaisons la figure dans cette hypothèse (*fig. 2*). Nous avons immédiatement

$$\frac{OJ}{BH} = \frac{OA}{BA} = e.$$

Or

$$BH = \frac{x}{\cos \varphi}, \quad OH = x \tan \varphi, \quad HJ = x \sin^2 \varphi,$$

$$OJ = \sqrt{OH^2 + HJ^2} = x \tan \varphi \sqrt{1 + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}.$$

L'égalité précédente devient donc

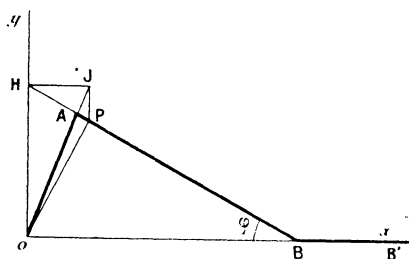
$$\sin \varphi \sqrt{1 + \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta} = e,$$

On

$$\sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi - \sin^6 \varphi = e^2.$$

Telle est l'équation qui résout le problème. Il suffit de remarquer que, si φ_0 est l'inclinaison de la bielle

Fig. 2.



sur la tige lorsque la manivelle est perpendiculaire à cette tige (valeur maximum de φ), on a $\sin \varphi_0 = e$, pour que cette équation prenne la forme peut-être plus frappante

$$\sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi - \sin^6 \varphi = \sin^2 \varphi_0.$$

Posant $\sin^2 \varphi = z$ et $\sin^2 \varphi_0 = z_0$, on voit que l'équation à résoudre pour avoir le maximum peut s'écrire

$$z^3 - z^2 - z + z_0 = 0,$$

équation de forme très simple dont il est aisé d'obtenir (soit par les procédés d'approximation connus, soit par nomogramme) l'unique racine comprise entre 0 et 1.

Pour avoir la valeur correspondante de φ donnée, comme on l'a vu plus haut, par $\text{OH}\omega$, il suffit de calculer celle de OH , donnée elle-même par

$$OH = x \tan \phi.$$

Tout revient donc à calculer x (c'est-à-dire OB de la figure 2), en fonction de φ . Or, on a immédiatement

$$\frac{AB}{OB} = \frac{AH}{HJ} = \frac{BH}{OB + HJ},$$

ou

$$\frac{l}{x} = \frac{\frac{x}{\cos \varphi}}{x + x \sin^2 \varphi},$$

d'où

$$x = l \cos \varphi (1 + \sin^2 \varphi)$$

et, par suite,

$$OH = l(\sin \varphi + \sin^3 \varphi).$$