

LÉON POMEY

Démonstration algébrique du théorème de d'Alembert

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 97-103

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__97_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[A3a α]

DÉMONSTRATION ALGÈBRIQUE DU THÉORÈME DE D'ALEMBERT;

PAR M. LÉON POMEY ⁽¹⁾,
Ingénieur des Manufactures de l'État.

Toute équation algébrique entière de degré n a n racines.

Considérons le polynôme

$$f(z) = Az^n + Bz^{n-1} + \dots + K,$$

où z est une variable complexe $x + iy$, $A, B, \dots, K$ des nombres complexes quelconques (dont le premier et le dernier, A et K , sont supposés différents de zéro). Supposons qu'on mette $f(z)$ sous la forme ordinaire des nombres complexes, en désignant par $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ les deux polynômes entiers par rapport aux variables réelles x et y , qui représentent la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$; on aura

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

et le carré de son module sera

$$|f(z)|^2 = F(x, y) = P^2(x, y) + Q^2(x, y).$$

LEMES PRÉLIMINAIRES.

LEMME I. — *Le polynôme $f(z)$ est une fonction synectique, en sorte que les conditions classiques*

(¹) Actuellement mobilisé comme lieutenant d'artillerie. Sur le front, en France, depuis le début des hostilités.

(Note de la Rédaction.)

suivantes sont toujours satisfaites :

$$(1) \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{\partial Q}{\partial x},$$

et que sa dérivée est

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = \text{aussi } \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y} \\ &= \text{aussi } n A z^{n-1} + (n-1) B z^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

Nous admettons ce résultat sans démonstration.

COROLLAIRE I. — Il résulte de là que :

Le polynome $f'(z)$, ainsi que toutes les autres dérivées successives sont aussi des fonctions synectiques, en sorte que les conditions suivantes sont également satisfaites :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} &= - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}, \\ \dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

En sorte qu'on a

$$\begin{aligned} f''(z) &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \text{aussi } \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - i \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \\ &= \text{aussi } \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + i \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite pour les autres dérivées successives.

COROLLAIRE II. — Il résulte de là immédiatement que :

Si un nombre $a = \alpha + i\beta$ annule toutes les $\lambda - 1$ premières dérivées [de façon qu'on ait

$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{\lambda-1}(a) = 0$], TOUTES les dérivées partielles de $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sans exception jusqu'à l'ordre $\lambda - 1$ inclus s'annuleront pour le système de valeurs $x = \alpha, y = \beta$.

LEMME II. — Si $|z|$ tend vers l'infini, il en est de même de $|f(z)|$.

On démontre en effet facilement que, L désignant un nombre positif quelconque, on peut déterminer un nombre positif R tel que $|f(z)|$ soit $> L$ dès que $|z|$ est $\geq R$.

COROLLAIRE III. — Donnons à z une valeur quelconque z_0 , et soit L la valeur correspondante de $|f(z)|$. On peut trouver un nombre positif R tel que, pour $|z| \geq R$, on ait $|f(z)| > L$. La circonférence de rayon R , concentrique à l'origine, et la région intérieure du plan constituent un domaine borné et complet où $|f(z)|$, qui varie d'une manière continue avec z , admet un *minimum* m au plus égal à L , qu'il atteigne effectivement pour une valeur déterminée $a = \alpha + i\beta$ de z , dont l'affixe est intérieure au cercle C .

Je renvoie, pour les détails de la démonstration du lemme II et du corollaire III, au *Cours d'Analyse* de M. Jordan.

Je peux donc écrire

$$F(\alpha, \beta) = m^2.$$

LEMME III (relatif aux minima d'une fonction de deux variables). — Considérons une fonction réelle quelconque $F(x, y)$ de deux variables réelles, développable par la série de Taylor au voisinage d'un point (α, β) tel que $F(\alpha, \beta)$ soit un minimum de $F(x, y)$,

d'où

$$\begin{aligned} F(x, y) = F(\alpha, \beta) + (x - \alpha) \frac{\partial F}{\partial \alpha} + (y - \beta) \frac{\partial F}{\partial \beta} \\ + \frac{1}{1.2} \left[(x - \alpha) \frac{\partial F}{\partial \alpha} + (y - \beta) \frac{\partial F}{\partial \beta} \right]^2 + \dots \end{aligned}$$

(en représentant par un crochet armé d'un indice la puissance symbolique correspondante de la fonction incluse dans le crochet).

Je dis que :

L'ensemble des termes du plus bas degré en $x - \alpha$ et $y - \beta$, dans ce développement, à la suite de $F(\alpha, \beta)$, doit nécessairement former un ensemble homogène (un polynôme homogène) de degré PAIR par rapport à l'ensemble des deux variables $x - \alpha$, $y - \beta$.

En effet, supposons que $|x - \alpha|$ et $|y - \beta|$ soient infiniment petits l'un et l'autre, mais de telle sorte que $\frac{x - \alpha}{y - \beta}$ tende vers une limite finie l choisie arbitrairement positive ou négative.

Soit alors λ le degré le plus faible pour l'ensemble des deux variables $x - \alpha$ et $y - \beta$; d'où

$$\begin{aligned} F(x, y) - F(\alpha, \beta) = (y - \beta)^\lambda P_\lambda(l) \\ + (y - \beta)^{\lambda+1} P_{\lambda+1}(l) + \dots, \end{aligned}$$

$P_\lambda(l)$, $P_{\lambda+1}(l)$ représentant des polynômes en l de degrés λ , $\lambda + 1$, ... au maximum respectivement.

Or je pourrai choisir le module de $y - \beta$ suffisamment petit pour que tous les termes à la suite du premier soient infiniment petits par rapport à lui, de façon que ce soit lui qui impose son signe au deuxième membre. En effet :

1° Si $F(x, y)$ est un polynôme entier par rapport

à x et y , le développement de Taylor se réduit à un polynome entier, et la possibilité de rendre tous les termes à la suite du premier négligeables par rapport à lui ressort immédiatement de la démonstration, donnée par M. Jordan, du lemme II.

2° Si $F(x, y)$ n'est pas un polynome entier, cela résulte immédiatement des propriétés élémentaires des séries entières (de leur continuité et de leur convergence uniforme). Ce cas-là ne nous intéresse d'ailleurs pas directement pour la démonstration actuelle.

Or cela étant posé, il est bien évident que, si λ est IMPAIR, je peux choisir le signe de $y - \beta$ de façon que le signe de $(y - \beta)^\lambda P_\lambda(t)$, et par conséquent du second membre, soit $(-)$.

En sorte qu'au voisinage du point (α, β) il y aurait des valeurs de $F(x, y)$ inférieures à son minimum $F(\alpha, \beta)$. Ce qui est contradictoire. Donc il est nécessaire que λ soit pair. En particulier il est nécessaire qu'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 = \frac{\partial F}{\partial \beta}.$$

REMARQUE. — Ce lemme s'applique, comme cas particulier, au polynome $F(x, y)$ défini précédemment comme carré du module de $f(z)$, et au point (α, β) qui le rend minimum.

THÉORÈME DE D'ALEMBERT.

Nous allons montrer, en supposant le théorème de d'Alembert vrai jusqu'au degré $n - 1$, que le minimum m atteint (corollaire III) par $|f(z)|$ est nécessairement nul.

Le théorème sera ainsi démontré pour le degré n , et

comme il est vrai pour le degré 1, il le sera d'une manière générale.

Or si m n'est pas nul, appelons μ la valeur que prend $f(z)$ quand z prend la valeur $\alpha = \alpha + i\beta$. L'équation $f(z) - \mu = 0$ a donc une racine α . Par suite en divisant cette équation par $z - \alpha$, on retombe sur une équation de degré $n - 1$ qui en a $n - 1$. Donc $f(z) - \mu = 0$ a n racines : $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$. Je dis que plusieurs de ces racines sont nécessairement égales et que celles qui sont distinctes ont un ordre de multiplicité PAIR.

En effet, on a, par la formule de Taylor,

$$(\gamma) \left\{ \begin{aligned} f(z) &= f(\alpha_j) + (z - \alpha_j) f'(\alpha_j) + \frac{(z - \alpha_j)^2}{1.2} f''(\alpha_j) + \dots \\ &\quad (j = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right.$$

Or puisque $F(\alpha_j, \beta_j)$ est minimum, on doit avoir (lemme III) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha_j} = 0 &= 2 P(\alpha_j, \beta_j) \frac{\partial P}{\partial \alpha_j} + 2 Q(\alpha_j, \beta_j) \frac{\partial Q}{\partial \alpha_j}, \\ \frac{\partial F}{\partial \beta_j} = 0 &= 2 P(\alpha_j, \beta_j) \frac{\partial P}{\partial \beta_j} + 2 Q(\alpha_j, \beta_j) \frac{\partial Q}{\partial \beta_j}. \end{aligned}$$

Puisque, par hypothèse, $P(\alpha_j, \beta_j)$ et $Q(\alpha_j, \beta_j)$ ne sont pas nuls tous deux, il faut qu'on ait

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha_j} \frac{\partial Q}{\partial \beta_j} - \frac{\partial Q}{\partial \alpha_j} \frac{\partial P}{\partial \beta_j} = 0,$$

ou, en vertu des formules (1) (lemme I) :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \alpha_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \alpha_j} \right)^2 = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha_j} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial \alpha_j} = \dots$$

Il en résulte (même lemme) que l'on a

$$f'(x_j + i\beta_j) = 0.$$

Donc la formule de Taylor (2) montre que a_j est racine d'ordre au moins égal à 2. Soit λ son ordre de multiplicité. Il est forcément *pair*, car $f'(a_j)$, $f''(a_j)$, ..., $f^{\lambda-1}(a_j)$ étant nuls, il en est de même (corollaire II) de toutes les dérivées partielles de $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ jusqu'à l'ordre λ exclusivement.

Or, puisque $F(x_j, \beta_j)$ est un minimum, il faut (lemme III et remarque à la fin du lemme) que λ soit *pair*.

Donc l'équation $f(z) - \mu = 0$ n'a que des racines d'ordre *PAIR*, *ce qui est manifestement impossible si le degré n de $f(z)$ est IMPAIR*. Donc dans ce cas le théorème est ainsi démontré.

Si le degré n est *PAIR*, la théorie de la division des polynômes permet de mettre en évidence ces racines; d'où

$$f(z) - \mu \equiv A(z - a)^{2\lambda}(z - b)^{2\lambda'} \dots$$

Le second membre est donc le carré d'un polynôme entier $p(z)$; d'où

$$f(z) \equiv p^2(z) + \mu,$$

$p(z)$ étant de degré $\frac{n}{2}$. On a donc

$$f(z) = [p(z) + i\sqrt{\mu}][p(z) - i\sqrt{\mu}].$$

Chacun des deux facteurs, mis ainsi en évidence, est un polynôme entier de degré $\frac{n}{2}$, qui a par hypothèse $\frac{n}{2}$ racines, lesquelles devraient aussi être racines de $f(z)$.

On aboutit donc encore à une contradiction. Donc il est impossible de supposer $m \neq 0$. c. q. f. d.