

F. BALITRAND

**Construction du centre de courbure
de l'hyperbolisme et de l'affine d'une
courbe donnée**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 74-78

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__74_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[O'2e]

**CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE
DE L'HYPERBOLISME ET DE L'AFFINE D'UNE COURBE DONNÉE;**

PAR M. F. BALITRAND.

Soient x et y les coordonnées d'un point m d'une courbe (m) et X , Y celles d'un point M d'une courbe (M) . Si ces dernières sont liées aux précédentes par les formules

$$(1) \quad x = X, \quad y = \frac{XY}{a},$$

la courbe (M) est dite l'*hyperbolisme* de la courbe (m) ⁽¹⁾.

(¹) Au sujet de la définition et des propriétés de l'hyperbolisme et de l'afine d'une courbe se reporter à un article de M. Goormaghtigh (*Nouvelles Annales*, 1915, p. 404 et 407). Consulter aussi le *Traité des courbes spéciales remarquables* de M. Gomès Teixeira (t. I, p. 95, 99 et *passim*).

Nous nous proposons de construire géométriquement le cercle osculateur de (M) en M connaissant celui de (m) en m.

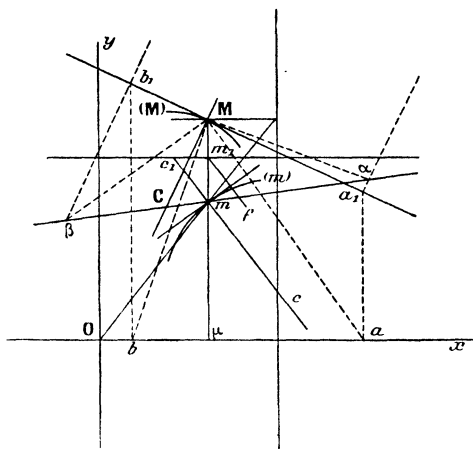
M. Goormaghtigh a donné dans les *Nouvelles Annales* une solution de ce problème fondée sur la considération des courbes intégrales; celle que nous allons indiquer est plus directe.

La parabole qui a pour équation

$$(2) \quad x^2 - \alpha x - \beta y - \gamma = 0$$

a son axe parallèle à Oy et dépend de trois paramètres, α, β, γ dont on peut disposer pour qu'elle passe en m et y oscule la courbe (m).

Fig. 1.



En lui appliquant la formule (1), on la transforme en une hyperbole qui a pour équation

$$(3) \quad x^2 - \frac{\beta xy}{a} - \alpha x - \gamma = 0.$$

Celle-ci passe en M et y oscule (M). Le problème

revient donc à construire son centre de courbure C en ce point.

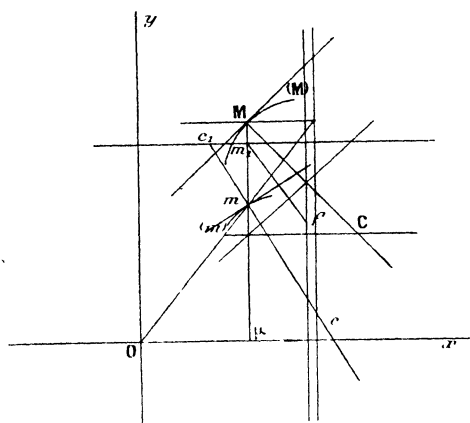
Or elle admet Oy comme asymptote et elle coupe Ox aux mêmes points que la parabole (2). Pour la déterminer, il suffit donc de connaître ces points.

Si l'on désigne par c le centre de courbure de (m) en m , et si l'on prolonge cm d'une longueur

$$mc_1 = \frac{cm}{2},$$

on obtient, d'après un théorème connu, un point de la directrice de la parabole (2) et en menant de c_1 une

Fig. 2.



perpendiculaire sur Oy on a cette directrice elle-même. Dès lors, la construction du foyer f est immédiate, car il suffit de prendre le symétrique, par rapport à la tangente en m , du point m_1 où mM coupe la directrice. En traçant ensuite, avec un rayon égal à la distance de la directrice à l'axe Ox , un cercle de centre f , on obtient les points a et b communs à Ox et à la parabole (2). Ces points appartiennent aussi à

l'hyperbole (3), qui se trouve ainsi déterminée d'une façon surabondante; car on en connaît le point M et la tangente en ce point, une asymptote, Oy , et deux points a et b .

La construction de son centre de courbure C en M est dès lors un problème connu, qui a reçu plusieurs solutions, et pour lequel nous indiquerons la suivante :

Les parallèles à Oy , menées par a et b , rencontrent la tangente en M en a_1 et b_1 ; les parallèles à la normale en M, menées par ces points, rencontrent respectivement en α et β les perpendiculaires élevées en M à Mb et Ma; la droite $\alpha\beta$ détache sur la normale en M un segment égal au diamètre du cercle osculateur en ce point.

En résumé, on a, pour déterminer le centre de courbure de l'hyperbolisme d'une courbe, la construction suivante, qui est assez longue, mais qui s'effectue entièrement avec la règle et le compas :

On prolonge le rayon de courbure cm de (m) d'une longueur $mc_1 = \frac{mc}{2}$ et l'on mène par c_1 une parallèle à Ox . Soient m_1 et μ les points où la droite mM coupe cette parallèle et Ox . Du point f , symétrique de m_1 par rapport à la tangente en m , on décrit, avec $m_1\mu$ pour rayon, un cercle qui rencontre Ox en a et b . Les parallèles à Oy , menées par ces points, coupent la tangente en M en a_1 et b_1 ; les perpendiculaires à la tangente élevées en ces points rencontrent en α et β celles menées à Mb et Ma au point M; la droite $\alpha\beta$ passe par l'extrémité du diamètre du cercle osculateur en M.

Pour l'affine d'une courbe donnée, la construction est analogue, mais notablement plus simple. Les for-

mules de transformation étant

$$x = X, \quad y = kY \quad (k = \text{const.}),$$

la parabole (2) a pour transformée une autre parabole

$$(4) \quad x^2 - \alpha x - k\beta y - \gamma = 0$$

de même axe que la première. La connaissance du point f suffit pour déterminer cet axe et, celui-ci connu, la construction du centre de courbure de (4) en M n'offre pas de difficultés.

On peut notamment, pour l'obtenir, tirer par le point où l'axe rencontre la normale une parallèle à la tangente en M; par le point M tirer une parallèle à l'axe et du point d'intersection de ces deux droites abaisser la perpendiculaire sur l'axe. Elle passe au centre de courbure cherché. On a donc la construction suivante :

Le point f étant déterminé comme précédemment, on mène par ce point une perpendiculaire sur Ox . Par le point où elle rencontre la normale en M on tire la parallèle à la tangente en M et par M on tire une parallèle à Oy . Du point d'intersection de ces deux parallèles on mène la parallèle à Ox ; elle passe au centre de courbure cherché.