

F. BALITRAND

Construction du rayon de courbure de la polaire réciproque d'une courbe par rapport à un cercle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 461-465

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__461_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

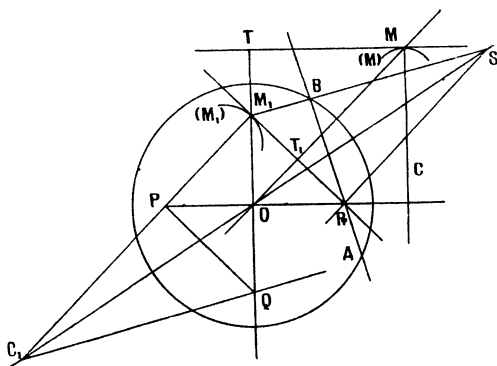
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[O¹²e]

**CONSTRUCTION DU RAYON DE COURBURE DE LA
POLAIRE RÉCIPROQUE D'UNE COURBE PAR RAP-
PORT A UN CERCLE ;**

PAR M. F. BALITRAND.

Considérons une courbe (M) et sa polaire réciproque (M_1) par rapport à un cercle de centre O . M et M_1 étant deux points correspondants et C et C_1 les



centres de courbure en ces points, nous nous proposons, connaissant C , de donner une détermination géométrique de C_1 .

Nous prendrons pour axes deux diamètres rectangulaires du cercle O et nous ferons usage de coordonnées tangentielles; c'est-à-dire que (M) sera définie comme l'enveloppe de la droite

$$ux + vy - 1 = 0;$$

u et v étant fonctions d'un paramètre.

Les coordonnées x , y du point de contact M de la droite avec son enveloppe seront données par les deux équations

$$\begin{aligned} ux + vy - 1 &= 0, \\ x du + y dv &= 0; \end{aligned}$$

d'où l'on tire (1)

$$x = \frac{dv}{u dv - v du}, \quad y = \frac{-du}{u dv - v du};$$

et par différentiation

$$dx = \frac{v(dv d^2 u - du d^2 v)}{(u dv - v du)^2}, \quad dy = \frac{-u(dv d^2 u - du d^2 v)}{(u dv - v du)^2}.$$

L'élément d'arc de (M) a pour expression

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{(dv d^2 u - du d^2 v)(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{(u dv - v du)^2}.$$

L'angle de contingence ϵ se calcule aisément et l'on

(1) On peut remarquer que ces formules fournissent une interprétation géométrique simple du rapport des différentielles du et dv . On a, en effet,

$$\frac{du}{dv} = -\frac{y}{x} = -\tan \theta,$$

θ désignant l'angle du rayon vecteur OM. A ce point de vue il y a une parfaite réciprocité entre x , y ; u et v ; car on a

$$\frac{du}{dv} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v}.$$

trouve

$$\varepsilon = \frac{u \, dv - v \, du}{u^2 + v^2};$$

d'où pour le rayon de courbure ρ la valeur suivante :

$$\rho = \frac{(dv \, d^2u - du \, d^2v)(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{(u \, dv - v \, du)^2}.$$

D'autre part, les coordonnées x_1, y_1 du pôle M_1 de la tangente en M à (M) , par rapport au cercle directeur, sont

$$x_1 = a^2 u, \quad y_1 = a^2 v;$$

a désignant le rayon du cercle directeur. Il en résulte pour le rayon de courbure de (M_1) en M_1 la formule

$$\rho_1 = a^2 \frac{(du^2 + dv^2)^{\frac{3}{2}}}{du \, d^2v - dv \, d^2u}.$$

Appelons V l'angle sous lequel la courbe (M) est coupée par le rayon vecteur OM [ou bien la courbe (M_1) par le rayon vecteur OM_1]; on trouve sans difficulté

$$\sin^2 V = \frac{(u \, dv - v \, du)^2}{(u^2 + v^2)(du^2 + dv^2)};$$

d'où

$$\rho \rho_1 \sin^3 V = a^2.$$

Telle est la formule cherchée (1). Elle conduit à plusieurs constructions géométriques de C_1 connaissant C .

Soient MT la tangente en M à (M) et $M_1 T_1$ la tan-

(1) Cette Note nous a été inspirée par un article de M. Chemin sur le même sujet (*Nouvelles Annales*, 1867, p. 49). La formule

$$\rho \rho_1 \sin^3 V = a^2$$

est de M. Chemin qui l'établit par une méthode différente et n'en déduit pas de construction géométrique pour C_1 .

gente à (M_1) en M_1 . Les droites OM et OM_1 sont respectivement perpendiculaires sur M_1T_1 et MT .

1° *Par le centre O du cercle directeur on élève à OM_1 une perpendiculaire qui coupe en P la normale à (M_1) en M_1 ; la perpendiculaire élevée en P à cette normale rencontre OM_1 en Q; la perpendiculaire abaissée de Q sur la polaire AB de C, par rapport au cercle directeur, passe en C_1 .*

En effet les deux triangles OMC , C_1M_1Q sont semblables comme ayant leurs côtés parallèles. Donc

$$MC \times M_1C_1 = OM \times M_1Q.$$

Mais

$$M_1Q = \frac{OM_1}{\sin^2 V}.$$

T et T_1 étant les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les tangentes en M et M_1 , on a aussi

$$OM_1 = \frac{OT_1}{\sin V} = \frac{a^2}{OM \sin V};$$

d'où

$$M_1O = \frac{a^2}{OM \sin^3 V};$$

par suite

$$MC \times M_1C_1 = \frac{a^3}{\sin^3 V}$$

et M_1C_1 est bien égal à ρ_1 .

Par une transformation convenable, on peut déduire de ce qui précède la nouvelle construction suivante :

2° *Soit R le point où la polaire de C rencontre M_1T_1 ; élevons en ce point à M_1T_1 une perpendiculaire qui coupe en S la perpendiculaire abaissée de M_1 sur la polaire de C; SO passe en C_1 .*

Le point R est le pôle de MC et le point M_1 est le

pôle de MT ; donc OM_1 et OR sont rectangulaires et par suite OR est le prolongement de OP .

On voit facilement que les deux triangles C_1PQ , M_1RS sont homothétiques par rapport au point O ; d'où il résulte que SO passe bien en C_1 .