

F. GOMES TEIXEIRA

Sur une manière de construire les cubiques circulaires

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 449-454

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__449_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M¹5k α]

SUR UNE
MANIÈRE DE CONSTRUIRE LES CUBIQUES CIRCULAIRES ;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA.

1. Le nombre des méthodes qu'on a données pour la construction des cubiques circulaires non unicursales est bien petit. Casey en a donné une dans les *Transactions of the Royal Irish Academy* (t. XXIV, 1867), que nous avons exposée dans notre *Traité des courbes spéciales* (t. I, p. 80), et Czuber en a donné une autre dans le *Zeitschrift für Mathematik* (t. XXXII, 1887), laquelle a été indiquée par M. Loria dans son *Spezielle Ebene Kurven* (t. I, p. 34). Il ne sera donc pas inutile d'en donner ici une autre qui n'a pas été encore signalée, croyons-nous.

La méthode que nous allons exposer est basée sur le théorème suivant :

Prenons sur un plan quatre points A, B, A₁, B₁. Par le point B menons une droite (D) de direction arbitraire et désignons par C le point où elle coupe la droite AA₁. Ensuite marquons sur cette droite un point C₁ tel que le rapport des distances de C et C₁ au point A soit égal à une constante donnée c, et décrivons une circonférence passant par A₁, B₁ et C₁. Cette circonférence coupe la droite (D) en deux points qui décrivent une cubique circulaire, quand la direction de la droite varie.

Prenons pour origine des coordonnées orthogonales le point A et pour axe des abscisses la droite AA₁, et désignons respectivement par (a, b), (h, o), (a₁, b₁) les coordonnées des points B, A₁ et B₁. L'équation d'une droite arbitraire (D) passant par B est

$$(1) \quad y - b = m(x - a),$$

et cette droite coupe l'axe des abscisses en un point C dont l'abscisse est déterminée par l'égalité

$$x_1 = a - \frac{b}{m}.$$

L'équation d'un cercle passant par le point A₁ et ayant le centre en un point (α₁, β₁) est

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y = h^2 - 2h\alpha_1,$$

et la condition pour que ce cercle passe par le point B₁ est, par suite,

$$a_1^2 + b_1^2 - 2\alpha_1 a_1 - 2\beta_1 b_1 = h^2 - 2h\alpha_1.$$

Donc, en supposant b₁ différent de zéro, l'équation des cercles passant par A₁ et B₁ est

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1(x^2 + y^2) - 2\alpha_1 b_1 x - (a_1^2 + b_1^2 - 2\alpha_1 a_1 + 2h\alpha_1 - h^2)y \\ \quad = b_1(h^2 - 2h\alpha_1). \end{array} \right.$$

Ce cercle coupe l'axe des abscisses au point A₁ et en un autre point C₁ dont l'abscisse est déterminée par l'équation

$$x_2 = 2\alpha_1 - h,$$

et l'on a par hypothèse

$$(3) \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{ma - b}{m(2\alpha_1 - h)} = c.$$

En éliminant maintenant m et α₁ entre les équations

tions (1), (2) et (3), on obtient l'équation du lieu décrit par les points d'intersection de la droite (D) et du cercle considéré, quand h varie, savoir :

$$(4) \quad \begin{cases} [(ch + a)(y - b) - b(x - a)][b_1x + (h - a_1)y - hb_1] \\ = c(y - b)[b_1(x^2 + y^2) - (a_1^2 + b_1^2 - h^2)y - b_1h^2], \end{cases}$$

ou

$$(5) \quad \begin{cases} cb_1(x^2 + y^2)y \\ = bb_1(c - 1)x^2 + [(ch + a)b_1 - b(h - a_1)]xy \\ + [c(a_1^2 + b_1^2 + bb_1 - ha_1) + a(h - a_1)]y^2 \\ + bb_1h(1 - c)x + [bc(ha_1 - a_1^2 - b_1^2) - ahb_1]y. \end{cases}$$

On voit, au moyen de l'équation (4), que la courbe cherchée passe par les points A, A₁, B, B₁ et, au moyen de l'équation (5), qu'elle est une *cubique circulaire*, dont l'asymptote est parallèle à la droite AA₁.

2. En passant maintenant à la question inverse, considérons la cubique circulaire représentée par l'équation

$$(6) \quad (x^2 + y^2)y = Hx^2 + Kxy + Ly^2 + Mx + Ny,$$

rapportée à un système d'axes orthogonaux qui ont pour origine un point de la courbe et pour axe des abscisses une parallèle à l'asymptote réelle.

Les conditions, pour que les cubiques représentées par les équations (5) et (6) soient identiques, sont

$$\begin{aligned} b(c - 1) &= Hc, & hb(1 - c) &= Mc, \\ c(a_1^2 + b_1^2 + bb_1 - ha_1) + a(h - a_1) &= Lcb_1, \\ (ch + a)b_1 - b(h - a_1) &= Kcb_1, \\ bc(ha_1 - a_1^2 - b_1^2) - ahb_1 &= Ncb_1. \end{aligned}$$

Nous avons donc cinq équations pour déterminer les six constantes c , a , b , a_1 , b_1 , h , dont une reste par conséquent arbitraire; et, comme une de ces équations peut être remplacée par celle qui exprime

que (a, b) est un point de la cubique, on voit qu'on peut prendre le point (a, b) arbitrairement sur la courbe.

Les deux premières équations donnent

$$h = -\frac{M}{H}, \quad c = \frac{b}{b-H}$$

et déterminent donc c et h .

Les deux dernières équations font voir que le point (a_1, b_1) est l'un des points d'intersection de la droite représentée par l'équation

$$(7) \quad (ch + a - Kc)y + bx = bh$$

avec le cercle représenté par celle-ci

$$(8) \quad bc(x^2 + y^2) + (Nc + ah)y - bchx = 0;$$

l'autre point d'intersection est le point $(h, 0)$.

Nous pouvons donc construire la cubique (6), et d'une infinité de manières, au moyen de la méthode qui résulte du théorème énoncé au numéro précédent.

Il résulte encore, de ce qu'on vient d'exposer, le théorème suivant :

Prenons sur une cubique circulaire quelconque quatre points A, A_1, B, B_1 tels que les points A et A_1 soient placés sur une parallèle à l'asymptote réelle et le point B_1 coïncide avec le second point d'intersection de la droite (7) avec le cercle (8). Un cercle quelconque passant par A_1 et B_1 coupe la cubique en deux points situés sur une droite passant par B , et le cercle et la droite coupent la droite AA_1 en deux points C_1 et C tels que le rapport de AC à AC_1 est constant.

3. Ce qu'on vient de dire aux numéros précédents

est applicable aux cubiques circulaires unicursales et non unicursales. On en peut déduire, au moyen d'un passage à la limite, d'autres théorèmes applicables seulement aux cubiques circulaires unicursales.

Supposons qu'on fasse coïncider le point A_1 avec le point A et que le point B_1 tende vers le point A , en décrivant une droite représentée par l'équation $x = ky$. On a alors, en posant $h=0$, $a_1 = kb_1$, et ensuite $b_1=0$, l'équation

$$(9) \quad c(x^2 + y^2)y = b(c-1)x^2 + (a+bk)xy + (cb-ak)y^2,$$

qui représente une cubique circulaire unicursale ayant le point double à l'origine A . Les cercles (2), qui passent par A_1 et B_1 , deviennent à la limite tangentes à la droite $x = ky$ au point A .

Nous avons donc le théorème suivant :

Prenons sur un plan deux droites (D_1) et (D_2) et un point B . Par ce dernier point menons une droite D de direction variable et désignons par C le point où elle coupe la droite (D_1) . Ensuite marquons sur cette droite un point C_1 tel que le rapport de AC à AC_1 soit égal à une constante c , et décrivons une circonférence tangente à la droite (D_2) au point A et qui passe par le point C_1 . Cette circonférence coupe la droite (D) en deux points qui décrivent une cubique circulaire unicursale ayant le point double à A , quand la direction de la droite varie. L'asymptote de cette cubique est parallèle à la droite (D_1) . Cette cubique est représentée par l'équation (9), k étant la tangente trigonométrique de l'angle des droites (D_1) et (D_2) .

4. Réciproquement, si l'on donne la cubique repré-

sentée par l'équation

$$(x^2 + y^2)y = Hx^2 + Kxy + Ly^2,$$

les conditions pour que cette cubique soit identique à celle que l'équation (9) représente sont

$$(10) \quad b(c-1) = cH, \quad a+bk = cK, \quad cb-ak = cL.$$

Ces équations déterminent trois des constantes a , b , c , k , l'autre restant arbitraire.

Si la constante qui reste arbitraire est k , on peut déterminer b , au moyen de l'équation

$$b = \frac{Hk^2 + Kk + L}{1 + k^2}$$

et ensuite c et a , au moyen des deux équations (10).

Nous avons donc le théorème suivant :

Prenons sur le plan d'une cubique circulaire unicursale deux droites (D_1) et (D_2) passant par son point double A, et dont la première soit parallèle à l'asymptote réelle. Traçons ensuite un cercle de rayon variable tangent à la droite (D_2) au point A. Ce cercle coupe la cubique en deux points placés sur une droite qui passe par un point fixe B. Cette droite et le cercle coupent la droite (D_1) en deux points (C) et (C_1) tels que le rapport de AC à AC_1 est constant.

Si la droite (D_2) est perpendiculaire à la droite (D_1) , l'équation (9) prend la forme la plus simple, savoir :

$$c(x^2 + y^2)y = b(c-1)x^2 + axy + aby^2.$$