

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 426-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__426_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

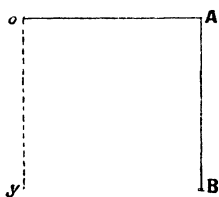
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Deux barres OA et AB pesantes, homogènes et identiques, sont clouées l'une sur l'autre à leur extrémité commune A.

L'extrémité O de OA est fixe et en outre la barre OA



est assujettie à rester horizontale. Il n'y a pas de frottement.

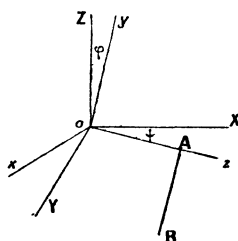
Le système étant en équilibre, on écarte très peu la barre AB de la verticale et l'on abandonne le système à lui-même sans vitesse initiale.

Étudier les petites oscillations.

N. B. — On remarquera que, si l'on prend pour axes invariablement liés au système, la droite OA pour axe des z , la parallèle à AB pour axe des y , la quantité Σmyz n'est pas nulle.

SOLUTION.

Rapportons le solide à trois axes liés à lui, Oz dirigé sui-



vant OA, Oy parallèle à AB et Ox perpendiculaire sur yOz, et prenons trois axes fixes dont OZ vertical dirigé vers le haut comme Oy.

Soit φ l'angle de Oy et de OZ.

Soit ψ l'angle de Oz avec OX.

Les rotations autour de Ox, Oy, Oz sont

$$p = \sin \varphi \psi', \quad q = \cos \varphi \psi', \quad r = \varphi'.$$

L'ellipsoïde d'inertie du corps par rapport à Oxyz est, en désignant par M la masse de l'une des barres et par a sa longueur,

$$Ma^2 \left[\frac{5}{3} x^2 + \frac{4}{3} y^2 + \frac{1}{3} z^2 + 2 \frac{1}{2} yz \right].$$

La force vive est donc

$$2T = Ma^2 \left[\frac{5}{3} p^2 + \frac{4}{3} q^2 + \frac{1}{3} r^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} qr \right].$$

La somme des moments des forces par rapport à OZ étant

nulle, la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à cet axe est constante, et par suite nulle et l'on a

$$\frac{\partial T}{\partial p} \sin \varphi + \frac{\partial T}{\partial q} \cos \varphi = 0,$$

ou

$$\frac{5}{3} p \sin^2 \varphi + \left(\frac{4}{3} q + \frac{1}{2} r \right) \cos \varphi = 0.$$

Or, φ , p , q , r étant petits, admettons qu'on puisse négliger le second ordre, il viendra

$$(1) \quad 8\psi' + 3\varphi' = 0.$$

Le théorème des moments par rapport à Oz donne, d'après Euler,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) + p \frac{\partial T}{\partial q} - q \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{1}{2} M g a \sin \varphi$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{3} r + \frac{1}{2} q \right] + p \left[\frac{4}{3} q + \frac{1}{2} r \right] - q \times \frac{5}{3} p = -\frac{1}{2} \frac{g}{a} \sin \varphi,$$

ou approximativement

$$(2) \quad 2\varphi'' + 3\psi'' + 3 \frac{g}{a} \varphi = 0.$$

En intégrant (1) et (2) et posant $\frac{24}{7} \frac{g}{a} = k^2$, et en supposant que primitivement φ soit égale à α et ψ à zéro, on aura

$$\varphi = \alpha \cos kt,$$

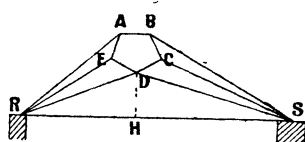
$$T = \frac{3}{8} \alpha (1 - \cos kt).$$

Le mouvement est donc périodique. L'amplitude de l'oscillation de OA est α et celle (en ψ) de AB par rapport à la verticale $\frac{3}{4} \alpha$.

L'amplitude de l'oscillation de OA est donc les $\frac{4}{3}$ de celle de AB .

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un système articulé est formé de*

onze tiges Cinq des tiges forment un pentagone régulier ABCDE. Aux sommets B, C, D sont articulées trois



tiges BS, CS, DS articulées toutes trois à leur extrémité S. Aux sommets A, E, D sont articulées trois tiges AR, ER, DR articulées toutes trois à leur extrémité R.

Ce système est placé dans un plan vertical et il repose sans frottement par les sommets R et S sur deux appuis situés dans un même plan horizontal.

On applique aux cinq sommets du pentagone cinq poids égaux chacun à 200^{kg} . Trouver les tensions des tiges. On négligera le poids des barres.

Le côté du pentagone est égal à $0^{\text{m}},40$. La ligne RS est parallèle à la barre AB, et elle est à une distance de AB égale à $1^{\text{m}},20$. Enfin, la perpendiculaire DH abaissée de D sur RS détermine les deux segments

$$RH = 1^{\text{m}},90, \quad SH = 2^{\text{m}},10.$$

(Novembre 1913.)

EPREUVE ECRITE. — Une plaque rectangulaire est mobile autour de son centre O qui est fixe. Trouver son mouvement.

L'un des côtés de la plaque est double de l'autre, de sorte que l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O est, par un choix convenable d'unités,

$$x^2 + 5y^2 + z^2 = 1,$$

en prenant pour axe des x la parallèle au grand côté, pour axe des y la normale au plan de la plaque et pour axe des z la parallèle au petit côté de la plaque.

La rotation initiale ω_0 s'effectue autour d'un axe situé dans le plan des xy et elle fait avec l'axe des x un angle dont la tangente est $\sqrt{\frac{3}{5}}$ de sorte qu'on a pour les compo-

santes de la rotation initiale

$$p_0 = \omega_0 \sqrt{\frac{5}{8}}, \quad q_0 = \omega_0 \sqrt{\frac{3}{8}}, \quad r_0 = 0.$$

On étudiera uniquement le mouvement de l'axe OZ.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On prend dans un plan horizontal quatre points fixes A_1, A_2, A_3, A_4 situés aux quatre sommets d'un carré de 2^m de côté.*

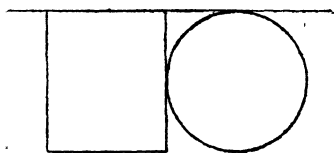
A ces quatre points on attache quatre fils élastiques de 4^m de longueur chacun et l'on réunit leurs extrémités en un point B auquel on suspend un poids de 100^{kg}.

Trouver approximativement la tension de chacun des fils et la position finale du point B sachant que les fils s'allongent proportionnellement à leurs tensions et que sous l'action d'un poids de 100^{kg} le premier s'allonge de 1 pour 100, le deuxième de 2 pour 100, le troisième de 3 pour 100 et le quatrième de 4 pour 100.

(Juin 1914.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Dans un plan vertical, sur une droite dont la pente est $\frac{3}{4}$, on place une plaque carrée et un disque circulaire, la plaque étant poussée par le disque.*

Les deux corps ont le même poids et sont dépolis. Le coefficient de frottement de ces corps entre eux et avec la



droite est égal à $\frac{1}{2}$. Primitivement le système est sans vitesse; trouver son mouvement.

Quel devrait être le coefficient de frottement pour qu'il y ait équilibre?

SOLUTION.

Soient :

α l'inclinaison de la droite sur l'horizon ;

f le coefficient de frottement ;

M la masse du disque et celle de la plaque ;

X la composante normale de la pression d'un corps sur l'autre ;

Y la composante normale de la pression de la plaque sur la droite ;

Z la composante normale de la pression du disque sur la droite ;

T la composante tangentielle de cette pression ;

x l'abscisse du centre du disque dans la direction de la droite.

On a d'abord

$$Y = Mg \cos \alpha + Xf,$$

$$Z = Mg \cos \alpha - Xf.$$

On a ensuite, pour la translation de la plaque,

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = Mg \sin \alpha + X - Yf;$$

pour la translation du disque,

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = Mg \sin \alpha - X - T$$

et, pour la rotation du disque,

$$\frac{1}{2} M \frac{d^2 x}{dt^2} = T - Xf.$$

En résolvant ce système d'équations, on trouve

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2g \frac{2 \sin \alpha - f(\sin \alpha + \cos \alpha)}{5 - 3f},$$

$$X = Mg \frac{3f \cos \alpha - \sin \alpha}{(5 - 3f)(1 + f)},$$

$$T = Mg \frac{2 \sin \alpha - f \cos \alpha - f^2(\sin \alpha - 2 \cos \alpha)}{(5 - 3f)(1 + f)},$$

$$Z = Mg \frac{5 \cos \alpha + f(\sin \alpha + 2 \cos \alpha) - 6f^2 \cos \alpha}{(5 - 3f)(1 + f)}.$$

Il y a roulement du disque si l'on a $T < Zf$, ce qui conduit à la condition $f > \frac{1}{3} \tan \alpha$, réalisée pour $f = \frac{1}{2}$.

Il y a donc roulement sans glissement et le mouvement des deux corps est uniformément accéléré, l'accélération étant égale à $\frac{2}{7} g$.

Si le frottement était tel qu'on eût $\frac{d^2 x}{dt^2} = 0$, il y aurait équilibre. On aurait, dans ce cas,

$$f = \frac{2 \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha},$$

et, pour $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, on aurait $f = \frac{6}{7}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. - *Un fil flexible, de poids négligeable, ABCDE, est attaché par ses deux extrémités, A et E, à deux points fixes A et E situés sur une même horizontale. Les quatre longueurs AB, BC, CD, DE sont égales chacune au côté de l'octogone régulier inscrit dans un cercle dont le diamètre serait AE.*

On suspend au point C un poids de 10^{kg} ; quels poids faut-il suspendre en B et D pour que le fil prenne la forme d'un demi-octogone régulier? On calculera ces poids à 1^{e} près.

SOLUTION.

$$P = 10^{\text{kg}}(\sqrt{2} + 1) = 24^{\text{kg}}, 142.$$

(Novembre 1914.)