

F. GONSETH

Une extension d'un théorème de Poncelet

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 384-385

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__384_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L'17d]

UNE EXTENSION D'UN THÉORÈME DE PONCELET ;

PAR M. F. GONSETH,

Assistant à l'École Polytechnique fédérale de Zurich.

Ce théorème, bien connu, s'énonce ainsi :

S'il existe un polygone inscrit dans une conique C_2 , et circonscrit à une autre conique Γ_2 , il existe une infinité de pareils polygones inscrits dans C_2 et circonscrits à Γ_2 .

Il est susceptible d'une extension dans l'espace.

Supposons qu'une conique C_2 , d'un plan π , et une cubique gauche C_3 soient rapportées projectivement; soit M' le point de C_2 correspondant au point M de C_3 .

Transformons C_3 dans une corrélation focale arbitraire. A tout point M , de C_3 , va correspondre un plan μ , passant par M ; l'enveloppe des plans μ est une seconde cubique gauche Γ_3 . Un plan μ coupe C_3 en deux points M_1 et M_2 différents de M . Soient M' , M'_1 et M'_2 les correspondants sur C_2 . Joignons M' à M'_1 et M'_2 ; les droites $M'M'_1$ et $M'M'_2$, lorsque M décrit la cubique C_3 , enveloppent une même conique Γ_2 . En effet : les seuls plans μ passant par M sont le plan focal de M et ceux de M_1 et de M_2 ; ces plans ne contiennent que les deux cordes MM_1 et MM_2 de C_3 , passant par M ; l'enveloppe des droites $M'M'_1$ et $M'M'_2$ est donc bien une conique.

Toute corrélation focale détermine, comme on sait,

un complexe linéaire de droites, L . Les droites telles que MM_1 et MM_2 appartiennent au complexe L déterminé par la corrélation introduite plus haut. L est d'ailleurs déterminé par cinq de ces droites, et la conique Γ_2 par les cinq droites de π qui leur correspondent.

Ainsi, à tout système focal correspond une conique Γ_2 et réciproquement.

Supposons maintenant qu'il existe un polygone de n côtés inscrit à C_2 et circonscrit à Γ_2 . On voit immédiatement qu'en pareil cas il existe un polygone gauche fermé, de n côtés, dont les sommets sont sur C_3 , et dont les plans (joignant deux côtés consécutifs) sont osculateurs à Γ_3 ; et le théorème de Poncelet se transforme dans le suivant :

S'il existe un polygone gauche dont les sommets sont sur une cubique gauche, C_3 , et dont les plans (joignant deux côtés consécutifs) sont osculateurs à une seconde cubique gauche Γ_3 , si de plus C_3 et Γ_3 sont réciproques dans un système focal arbitraire, il existe une simple infinité de pareils polygones inscrits dans C_3 et circonscrits à Γ_3 .