

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 271-274

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__271_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

M. G. Fontené. — *Sur deux propositions de Laguerre. — I. Le cercle pédal d'un point fixe par rapport aux triangles inscrits à une conique et circonscrits à une autre a pour enveloppe une analagmatique du quatrième ordre.*

Laguerre a énoncé ce théorème (*N. A.*, 1879, p. 205) sans en donner la démonstration.

II. *On considère une ellipse; soient u et v les distances des foyers de l'ellipse au centre du cercle, de sorte que les puissances de ces foyers par rapport au cercle sont $P = u^2 - R^2$, $P' = v^2 - R^2$. Les conditions de fermeture pour un triangle ou un quadri-*

latère circonscrit à l'ellipse et inscrit au cercle sont respectivement

$$PP' = 4b^2R^2,$$

$$\frac{b^2R^2}{PP'} + \frac{a^2}{P+P'} = \frac{1}{4}.$$

Cas où l'ellipse est remplacée par un cercle.

Les démonstrations de Laguerre (*N. A.*, 1879, p. 246 et 252) sont très indirectes; il donne la seconde relation entre u et v sous une forme moins simple, sans introduire P et P' .

M. G. Fontené. — *Au sujet de la question 711.* — De cette question posée par Faure (1864, p. 443), les deux premières parties ont été résolues (1865, p. 78, et 1868, p. 443). En ce qui concerne la troisième partie, non résolue, Faure signale une correction (1881, p. 143); on doit lire : puissance changée de signe. Il ajoute que le théorème figure dans son Recueil de théorèmes relatifs aux sections coniques. La quatrième partie est manifestement fausse; l'auteur dit qu'une équation de la forme

$$x^m f(a) + x^{m-1} f(a+1) + x^{m-2} f(a+2) + \dots = 0,$$

où f désigne une fonction algébrique, a toujours des racines imaginaires. Indépendamment du cas $m=1$, il s'ensuivrait, pour $m=2$, que l'équation

$$ax^2 + (a+1)x + (a+2) = 0$$

a toujours ses racines imaginaires, c'est-à-dire que l'on a toujours

$$(a+1)^2 - 4a(a+2) < 0,$$

ou

$$3a^2 + 6a - 1 > 0;$$

or ce trinôme a des racines et peut être négatif.

M. E.-N. Barisien. — *Au sujet du problème de Pappus généralisé.* — M. J. Joffroy a résolu très heureusement ce problème dans le cas d'un point P de la bissectrice d'un angle ω (1916, p. 168-171).

Je me permets d'ajouter deux remarques qui paraissent avoir leur intérêt. Je conserve les notations de M. Joffroy :

1° Si $l > 4a \sin \frac{\omega}{2}$, on aura quatre solutions réelles :

Si $l = 4a \sin \frac{\omega}{2}$, alors SS' est perpendiculaire à OP , et le problème comporte trois solutions réelles (l'une étant double).

Si $l < 4a \sin \frac{\omega}{2}$, le problème n'a plus que deux solutions réelles.

2° On peut aussi traiter le problème en prenant pour inconnues $PS = X$, $PS' = Y$ (voir la figure, *loc. cit.*).

On a tout d'abord

$$(A) \quad X + Y = l.$$

Le triangle PAS donne

$$X^2 = a^2 + \overline{AS}^2 - 2a AS \cos \omega.$$

Or, les triangles semblables PAS et PA'S' donnent

$$\frac{AS}{a} = \frac{X}{Y}, \quad AS = \frac{aX}{Y}.$$

Par conséquent

$$X^2 = a^2 + \frac{a^2 X^2}{Y^2} - 2a^2 \frac{X}{Y} \cos \omega,$$

ou

$$(B) \quad X^2 Y^2 = a^2 (X^2 + Y^2) - 2a^2 XY \cos \omega.$$

En remarquant que

$$X^2 + Y^2 = (X + Y)^2 - 2XY = l^2 - 2XY,$$

on a l'équation en XY

$$X^2 Y^2 = a^2 (l^2 - 2XY) - 2a^2 XY \cos \omega,$$

ou

$$(C) \quad X^2 Y^2 + 2a^2(1 + \cos \omega)XY - a^2 l^2 = 0.$$

Il en résulte

$$(D) \quad XY = -a^2(1 + \cos \omega) \pm a \sqrt{a^2(1 + \cos \omega)^2 + l^2}.$$

On est donc ramené à résoudre et à construire X et Y connaissant $X + Y$ et XY par (A) et (D).

La liaison entre cette solution et celle de M. Joffroy se fait par les relations suivantes :

$$OS = x = a - AS = a + \frac{aX}{Y}, \quad OS' = y = a + A'S' = a + \frac{aY}{X};$$

$$x = a \frac{(X + Y)}{Y} = \frac{al}{Y}, \quad y = a \frac{(X + Y)}{X} = \frac{al}{X};$$

$$xy = \frac{a^2 l^2}{XY}, \quad x + y = \frac{al^2}{XY};$$

$$XY = \frac{a^2 l^2}{xy}, \quad XY = \frac{al^2}{x + y}.$$

L'expression (D) peut encore s'écrire

$$XY = -2a^2 \cos \frac{2\omega}{2} \pm a \sqrt{4a^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} + l^2}.$$
