F. BALITRAND

Construction du centre de courbure de la spirale hyperbolique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 223-225

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__223_0>

[M^4e] [$O^1$2e]

CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE DE LA SPIRALE HYPERBOLIQUE;

Par M. F. BALITRAND.

On trouve dans Serret (*Calcul différentiel et intégral*, 2e édition, p. 360) la remarque suivante à propos du centre de courbure de la spirale hyperbolique : « La construction du rayon de courbure n'a elle-même aucune difficulté; mais elle n'offre pas assez d'intérêt pour que nous nous arrêtions à la développer. » On peut cependant donner de ce rayon plusieurs constructions géométriques, intéressantes à cause de leur simplicité.

Soient O le pôle de la spirale; M un de ses points; N et T les points de rencontre de la perpendiculaire élevée en O, au rayon vecteur OM, avec la normale et la tangente en M à la courbe. L'équation de la spirale étant, en coordonnées polaires,

$$\rho\omega = a,$$

l'expression générale du rayon de courbure,

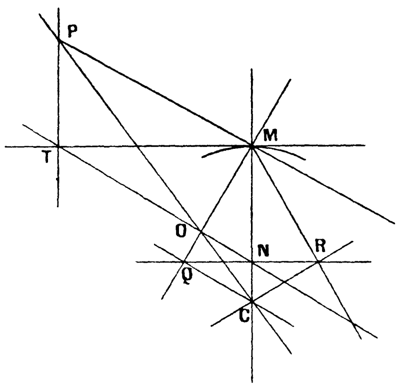
$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''},$$

donne dans le cas présent

$$R = \frac{\rho(a^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3} = \frac{MN^3}{OM^2} = \frac{MN^3}{ON \times OT}.$$

Cette formule conduit aux constructions géométriques suivantes du centre de courbure C en M :

1° *En* T *on élève une perpendiculaire à la tangente et en* M *une perpendiculaire au rayon vec-*



teur OM; *ces deux droites se coupent en* P; *la droite* PO *passe par le centre de courbure* C.

En effet, les triangles semblables OTP, ONC donnent, puisque TP = MN,

$$\frac{NC}{MN} = \frac{ON}{OT},$$

d'où

$$\frac{MC}{MN} = \frac{TN}{OT} = \frac{\overline{MN}^2}{OT \times ON}.$$

Donc MC est bien égal au rayon de courbure R.

2° *Par le point* N *on mène une parallèle à la tangente* MT *qui coupe le rayon vecteur* OM *en* Q; *la perpendiculaire élevée en ce point au rayon vecteur passe par le centre de courbure* C.

En effet, les triangles semblables MON, MQC donnent

$$\frac{\text{MC}}{\text{MN}} = \frac{\text{MQ}}{\text{MO}} = \frac{\text{MQ} \times \text{MO}}{\text{OT} \times \text{ON}}.$$

Mais le triangle rectangle MNQ donne

$$\overline{\text{MN}}^2 = \text{MQ} \times \text{MO};$$

donc

$$\frac{\text{MC}}{\text{MN}} = \frac{\overline{\text{MN}}^2}{\text{OT} \times \text{ON}};$$

ce qui prouve bien que C est le centre de courbure.

3° *En* M *on mène la symétrique du rayon vecteur par rapport à la normale; la parallèle à la tangente menée par* N *la coupe en* R; *la perpendiculaire élevée en* R *à* MR *passe au centre de courbure* C.

Le triangle MQR étant isoscèle, cette construction ne diffère pas au fond de la précédente.