NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PARFENTIEFF

Sur l'intégration de l'équation différentielle linéaire

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15 (1915), p. 78-79

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__78_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[H2a]

SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE;

PAR M. PARFENTIEFF,
Professeur à l'Université impériale de Kazan.

On peut trouver l'intégrale de l'équation différentielle linéaire très élégamment; la méthode est curieuse, parce qu'elle souligne très clairement le rôle que jouent les constantes arbitraires des intégrales des équations différentielles.

Prenons l'équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

et soit son intégrale générale

$$y = \varphi(x, \mathrm{C}); \tag{2}$$

alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(x, \varphi). \tag{3}$$

Dérivons maintenant l'équation (3) par rapport à la constante arbitraire C; on a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial \mathrm{C}} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{C}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\log \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{C}}\right) = \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

et par conséquent

$$\log \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{C}} = \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx,$$

c'est-à-dire

$$\varphi(x, \mathrm{C}) = \mathrm{C}\, e^{\int \frac{\partial f}{\partial \varphi} dx} + \psi(x). \tag{4}$$

Dans la formule (4) la fonction $\varphi(x)$ est encore inconnue et tout à fait arbitraire, mais nous la définirons sous la condition que la formule (4) doit satisfaire identiquement à l'équation (1).

La formule (4) est intéressante aussi à un autre point de vue; elle montre que la constante C entre dans l'intégrale de l'équation (1) linéairement, si $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ ne dépend pas de C. En prenant pour l'équation (1) l'équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = -py + q \tag{5}$$

(p et q sont des fonctions de x), notre formule (4) prend la forme

$$\varphi(x, C) = C e^{-\int p\,dx} + \psi(x) = e^{-\int p\,dx}\,[C + \xi(x)]. \tag{6}$$

Si la relation (6) est la solution de (5), on a

$$-p\,e^{-\int p\,dx}[C + \xi(x)] + e^{-\int p\,dx}\xi'(x)$$
$$= -p\,e^{-\int p\,dx}[C + \xi(x)] + q,$$

d'où

$$\xi'(x) = e^{\int p\,dx}\,q,$$

c'est-à-dire

$$\xi(x) = \int e^{\int p\,dx}\,dx,$$

et nous obtenons la formule classique

$$y = \varphi(x, C) = e^{-\int p\,dx}\left(C + \int e^{\int p\,dx}\,dx\right).$$

Notre remarque presque banale caractérise très bien la nature des méthodes classiques.