

R. BOUVAIST

Sur les cercles podaires et isopodaires d'un point par rapport à un triangle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15 (1915), p. 555-562

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__555_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K'2d]

**SUR LES CERCLES PODAIRES ET ISOPODAIRES D'UN POINT
PAR RAPPORT A UN TRIANGLE;**

PAR M. R. BOUVAIST.

Étant donnée une conique Σ de foyers réels F_1 et F_2 , on sait que le lieu des points M_1 et M_2 d'intersection d'une tangente variable à Σ avec les droites F_1M_1 , F_2M_2 également inclinées sur cette tangente d'un angle V est un cercle ayant son centre sur la perpendiculaire au milieu de F_1F_2 et ayant pour rayon le quotient de la longueur du demi-axe focal de Σ par $\sin V$. On en conclut immédiatement que :

Si, par deux points inverses F_1 et F_2 d'un triangle

ABC, on mène les droites $F_1\alpha$, $F_1\beta$, $F_1\gamma$, $F_2\alpha'$, $F_2\beta'$, $F_2\gamma'$ également inclinées sur les côtés BC, CA, AB, les six points α , β , γ , α' , β' , γ' sont concycliques. Nous désignerons le cercle α , β , γ sous le nom de *cercle isopodaire* du point F_1 par rapport au triangle ABC, l'inclinaison de $F_1\alpha$ sur BC étant donnée.

On connaît le théorème suivant (*Nouv. Ann.*, 1914, p. 218) : *Les axes radicaux des cercles podaires des points d'une droite Δ par rapport à un triangle ABC passent par un point fixe ω ou, en d'autres termes, ces cercles sont orthogonaux à un cercle fixe de centre ω .*

Je me propose de montrer que ce théorème ne s'étend pas aux cercles isopodaires des points de Δ par rapport à ABC.

Désignons par V, l'angle constant que font les droites $F_1\alpha$, $F_1\beta$, $F_1\gamma$ issues d'un point F_1 de Δ avec les hauteurs de ABC si (α, β, γ) sont les coordonnées de F_1 , on voit aisément que, en coordonnées trilinéaires normales, le triangle ABC étant le triangle de référence, le cercle isopodaire de F_1 a pour équation, si l'on pose

$$\begin{aligned}\Delta &= ax + by + cz, & \Delta x &= ax + b\beta + c\gamma, \\ C &= ayz + bxz + cxy, & Cx &= a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta x Cx C - abc \Delta \left[\frac{x}{a} \alpha (\gamma + \beta \cos A + \beta \sin A \tan V) \right. \\ \times (\beta + \gamma \cos A - \gamma \sin A \tan V) \\ + \frac{y}{b} \beta (\alpha + \gamma \cos B + \gamma \sin B \tan V) \\ \times (\gamma + \alpha \cos B - \alpha \sin B \tan V) \\ + \frac{z}{c} \gamma (\beta + \alpha \cos C + \alpha \sin C \tan V) \\ \left. \times (\alpha + \beta \cos C - \beta \sin C \tan V) \right] = 0.\end{aligned}$$

Si nous désignons par $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ les

coordonnées des points d'intersection de Δ avec le cercle ABC nous pouvons poser

$$z = \alpha_1 + \lambda \alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + \lambda \beta_2, \quad \gamma = \gamma_1 + \lambda \gamma_2;$$

d'où

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta \alpha_1 + \lambda \Delta \alpha_2, \\ C\alpha &= \lambda [a(\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2) + b(\gamma_1 \alpha_2 + \alpha_2 \gamma_1) \\ &\quad + c(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)] = \lambda K, \end{aligned}$$

l'équation du cercle isopodaïre de F_1 devient

$$\lambda K (\Delta \alpha_1 + \lambda \Delta \alpha_2) C - abc \Delta [\lambda^3 D_3 + \lambda^2 D_2 + \lambda D_1 + D_0] = 0,$$

équation qui définit un système de cercles du troisième ordre, se décomposant en la droite de l'infini et en une droite pour $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, $\lambda = -\frac{\Delta \alpha_1}{\Delta \alpha_2}$, les trois droites correspondantes étant les droites de Simson généralisées, relatives à l'angle $\frac{\pi}{2} - V$, des points d'intersection de Δ et du cercle ABC, et du point inverse du point à l'infini sur Δ .

Pour que le théorème énoncé soit vérifié, il faut que les trois droites qui ont respectivement pour équations $D_0 = 0$, $D_3 = 0$, $\Delta \alpha_1 D_2 - \Delta \beta_2 D_1 = 0$ soient concourantes. Si d'ailleurs ces trois droites sont concourantes la puissance du point de rencontre ω de $D_0 = 0$ et $D_3 = 0$ par rapport au cercle isopodaïre a l'expression

$$\frac{C}{abc} - \Delta \frac{\lambda D_2 + D_1}{\lambda \Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_1},$$

quand on y remplace les coordonnées courantes par celles du point ω , c'est-à-dire puisqu'on a

$$\frac{D_2}{\Delta \alpha_2} = \frac{D_1}{\Delta \alpha_1},$$

à l'expression

$$\frac{C}{abc} - \Delta \frac{D_1}{\Delta \alpha_1},$$

expression constante, qui montre que les cercles isopodaires sont orthogonaux à un cercle fixe de centre ω .

Or, si nous désignons par D et E les intersections de Δ avec le cercle ABC, on sait que les droites de Simson généralisées relatives à l'angle $\frac{\pi}{2} - V$, de D et E par rapport au triangle ABC, se coupent lorsque la droite DE se déplace parallèlement à elle-même sur la droite de Simson généralisée relative à l'angle $\frac{\pi}{2} - V$, d'un point F du cercle ABC, défini comme il suit : AA' désignant par exemple la bissectrice intérieure de l'angle A, la parallèle AX à DE menée par A, et la droite AF, font avec AA' de part et d'autre de cette droite les angles $\widehat{XAA'} = u$, $\widehat{A'AF} = u - 2V$. Les deux directions AX et AF ne seront donc inverses, c'est-à-dire les droites $D_0 = 0$, $D_3 = 0$, $\Delta\alpha_1 D_2 - \Delta\alpha_2 D_1 = 0$ ne sont concourantes que si $V = 0$. Le théorème énoncé ne s'applique donc qu'aux cercles podaires des divers points de Δ et non aux cercles isopodaires. [Voir, en ce qui concerne les propriétés de trois droites de Simson concourantes, l'étude de M. Lemaire sur l'hypocycloïde à trois rebroussements (*Nouv. Ann.*, 1914, p. 49 et 113).]

Le théorème relatif aux cercles podaires peut d'ailleurs se démontrer très facilement géométriquement comme il suit (je crois qu'aucune démonstration n'en a encore été donnée dans les *Nouvelles Annales*).

Soit, en effet, P un point de la droite Δ , la perpendiculaire à Δ en ce point coupe BC en α , AC en β , il existe trois coniques inscrites dans ABC, tangentes à $P\alpha\beta$ et ayant un de leur foyer sur Δ . Soient F_1, F_2, F_3 ces foyers, les cercles podaires de ces trois points par

rapport à ABC passeront par P , et l'axe radical de ces trois cercles sera la perpendiculaire abaissée de P sur la droite de Newton du quadrilatère $AB\alpha\beta$. Lorsque P varie sur Δ , cette droite de Newton enveloppe visiblement une parabole inscrite dans le triangle $A'B'C'$ (A' , B' , C' étant les milieux de BC , CA , AB) et ayant son axe perpendiculaire à Δ . $A\alpha$ coupe $B'C'$ en α' , $B\beta$ coupe $A'C'$ en β' , $\alpha'\beta'$, droite de Newton du quadrilatère $AB\alpha\beta$, coupe $P\alpha\beta$ en Q , Q est le point où elle touche son enveloppe, la perpendiculaire abaissée de P sur $\alpha'\beta'$ coupe l'axe de la parabole enveloppe en R , si cet axe coupe Δ en S , le segment RS est constant et égal au paramètre de la parabole, le point R est donc fixe, ce qui démontre le théorème.

Remarque. — On voit facilement que l'axe de la parabole considérée n'est autre que la droite de Simson du point inverse du point à l'infini sur Δ , et que, si des sommets A , B , C on abaisse des perpendiculaires AA_1 , BB_1 , CC_1 sur Δ , les perpendiculaires abaissées de A_1 , B_1 , C_1 sur BC , CA , AB concourent au point R .

THÉORÈME. — *Étant donnée une conique Σ , un point fixe P sur cette conique, ABC un triangle quelconque inscrit dans Σ , les cercles isopodaires de P (relatifs à un même angle V) passent par un point fixe R , quel que soit le triangle ABC .*

En effet, il existe une conique S inscrite dans ABC et ayant pour foyer le point P , les droites isotropes de P interceptent dans Σ une corde Δ qui est tangente à S ; l'isocline d'un angle V , menée sur Δ par P coupe Δ en R , point fixe qui appartient au cercle isopodaire de P par rapport à ABC . Δ est du reste la polaire du point de Frégier de P , par rapport à Σ .

Remarque. — Si Σ est une hyperbole équilatère et si l'angle V est droit, on voit que le cercle podaire d'un point de cette hyperbole par rapport à un triangle inscrit passe par le centre de la courbe, propriété bien connue, qui conduit immédiatement au théorème de Feuerbach : En effet, soient ABC un triangle, P et P' deux points inverses, le cercle podaire de P et P' coupe le cercle des neuf points de ABC , en ω_1 et ω_2 centres des hyperboles équilatères $ABCP$, $ABCP'$, si P et P' sont confondus, au centre I d'un des cercles inscrits dans ABC , le cercle correspondant touche le cercle des neuf points au centre de l'hyperbole $ABCI$.

2° Le théorème précédent donne naissance à un grand nombre de théorèmes particuliers, en voici quelques-uns à titre d'exemple :

α . *Étant données une conique S , un point fixe P , Q un point variable de cette courbe, MT une tangente à S parallèle à la symétrique de PQ par rapport aux axes, la droite joignant les projections de P sur la tangente MT et la droite MQ joignant son point de contact au point Q passe par un point fixe.*

β . *Soient P un point d'une conique, Q_1, Q_2, Q_3 les trois points de cette courbe dont les cercles osculateurs passent en P ; P_1, P_2, P_3 les projections de P sur les tangentes en Q_1, Q_2, Q_3 ; M_1, M_2, M_3 les milieux de PP_1, PP_2, PP_3 , les perpendiculaires élevées en P_1, P_2, P_3 aux droites P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3 et la droite de Simson de P par rapport au triangle $P_1P_2P_3$ sont concourantes.*

Théorème qui peut encore s'énoncer comme il suit :

Si l'on projette le point P , quatrième point d'in-

tersection du cercle des neuf points d'un triangle ABC, avec la conique tangente aux côtés BC, CA, AB en leurs milieux A' , B' , C' , en P_1 , P_2 , P_3 sur BC, CA, AB, les perpendiculaires élevées en P_1 , P_2 , P_3 aux droites joignant ces points aux milieux des segments PA' , PB' , PC' sont concourantes en un point de la droite de Simson de P par rapport au triangle $A'B'C'$.

γ . *Une droite variable Δ coupe une cubique circulaire à point double en P_1 , P_2 , P_3 , si O désigne le point double, les centres des cercles circonscrits aux triangles OP_1P_2 , OP_2P_3 , OP_1P_3 sont sur un cercle qui passe quelle que soit Δ par le point double O et le foyer singulier de la courbe.*

Remarque. — Nous avons vu que les cercles podaires des divers points de la droite Δ par rapport à un triangle ABC étaient orthogonaux à un cercle fixe dont le centre pouvait s'obtenir en prenant l'intersection de l'axe de la parabole inscrite dans le triangle $A'B'C'$ médian de ABC, et ayant son axe perpendiculaire à Δ , avec la perpendiculaire abaissée sur BC de la projection A_1 de A sur Δ , nous avons vu aussi que, S désignant l'intersection de l'axe de cette parabole avec Δ , le segment RS était égal au paramètre de ladite parabole. Si A'_1 désigne le symétrique de A_1 par rapport au côté $B'C'$ du triangle médian, la puissance de R par rapport aux divers cercles podaires est égale à $RA_1 \cdot RA'_1$, elle sera nulle si A'_1 coïncide avec R, ce qui exige visiblement que Δ soit la directrice de la parabole considérée.

On voit donc que : *Les cercles podaires d'un point quelconque d'un diamètre fixe du cercle circonscrit*

au triangle ABC passent par un point fixe ω , foyer de la parabole inscrite dans le triangle A'B'C' médian de ABC admettant pour directrice ce diamètre, et centre de l'hyperbole équilatère circonscrite à ABC, inverse du diamètre considéré.