

Sur un groupe de courbes classiques

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 511-515

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__511_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

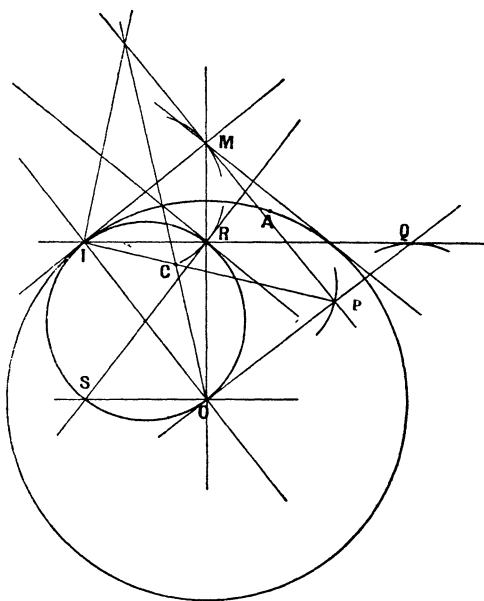
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M^c, e]

SUR UN GROUPE DE COURBES CLASSIQUES ;

PAR UN ABONNÉ.

Les courbes en question sont : la *développante de cercle*, la *spirale d'Archimède*, la *spirale hyperbolique* et la *spirale tractrice*. Elles ont entre elles de



nombreuses liaisons que nous nous proposons d'indiquer dans ce qui suit.

Considérons un cercle de centre O et de rayon a ,

que, pour abréger le langage, nous appellerons *cercle directeur*. Soient A un point fixe de ce cercle et I un point variable. Sur la tangente en I prenons une longueur IM égale à l'arc de cercle IA. Le lieu du point M, lorsque I varie, est une développante de cercle. Portons sur la tangente en M à cette développante, parallèle à OI, à partir du point de contact, une longueur MP constante et égale à a .

La développante peut être considérée comme engendrée par un point de la droite IM roulant sur le cercle directeur. Dans ce mouvement le point P, invariablement lié à IM, décrit une courbe et le point I étant le centre instantané de rotation, la normale en P à cette courbe est, d'après un théorème classique, la droite PI. Par suite, la sous-normale polaire de la courbe est constante et celle-ci est une spirale d'Archimède. Ainsi :

Si sur les tangentes à une développante de cercle on porte, à partir du point de contact, une longueur constante, égale au rayon du cercle directeur, le lieu des points ainsi obtenus est une spirale d'Archimède, ayant pour pôle le centre du cercle directeur.

La figure IMPO est un rectangle, donc :

La podaire d'une développante de cercle, par rapport au centre du cercle directeur, est une spirale d'Archimède.

Il s'ensuit, d'après une propriété bien connue, que :

La caustique d'une développante de cercle, le point lumineux étant au centre du cercle directeur, est une développée de la spirale d'Archimède.

La polaire de M, par rapport au cercle directeur,

est la perpendiculaire abaissée de I sur OM. Pour avoir le point où elle touche son enveloppe, quand I varie sur le cercle, il faut abaisser de O une perpendiculaire sur la tangente en M à la développante, c'est-à-dire sur MP, et prendre son intersection avec la polaire; ce qui donne un point Q. La sous-tangente polaire de la courbe lieu de ce point est OI; elle est donc constante et le lieu du point Q est une spirale hyperbolique. Ainsi :

La polaire réciproque d'une développante de cercle, par rapport au cercle directeur, est une spirale hyperbolique.

La polaire IQ coupe en R la droite OM et l'on a $OR \times OM = a^2$, c'est-à-dire que le point R décrit la courbe inverse de la développante. Or, si l'on mène la tangente en R à cette courbe, l'angle de cette tangente avec OR, d'après la propriété fondamentale des courbes inverses, est égal à l'angle OMP, ou, ce qui revient au même, à l'angle IOR. Donc, si l'on désigne par S le point de rencontre de cette tangente avec la perpendiculaire élevée en O à OM, on a $RS = OI = a$. La portion de la tangente comprise entre le point de contact et la perpendiculaire élevée au rayon vecteur par le pôle est constante, ce qui caractérise la spirale tractrice. Par suite :

La courbe inverse de la développante de cercle, par rapport au cercle directeur, est une spirale tractrice.

Nous avons vu plus haut que la spirale d'Archimède est engendrée par un point invariablement lié à la droite IM, lorsque celle-ci roule sur le cercle directeur. La formule de Savary; appliquée à ce cas particulier,

fournit la construction suivante pour le centre de courbure de la spirale :

Élever en I la perpendiculaire à IP jusqu'à sa rencontre avec PM et joindre le point ainsi obtenu au pôle O par une droite; cette droite coupe la normale IP au centre de courbure C.

En observant que la spirale d'Archimède et la spirale hyperbolique sont inverses l'une de l'autre par rapport au cercle directeur, et en se rappelant que les centres de courbure de deux courbes inverses, en des points correspondants, sont en ligne droite avec le pôle d'inversion, on voit que la droite OC passe par le centre de courbure de la spirale hyperbolique, lieu du point Q. On a ainsi une construction relativement simple de ce point.

Quand à la spirale tractrice, le fait qu'elle est l'inverse de la développante de cercle par rapport au cercle directeur, montre que le centre de courbure, correspondant au point R, est sur la droite OI; c'est-à-dire sur la droite qui joint le pôle au milieu de la portion de tangente comprise entre le point de contact et la perpendiculaire élevée au rayon vecteur par le pôle.

Lorsqu'une courbe mobile roule sans glisser sur une courbe fixe, on sait que les droites invariablement liées à la courbe mobile ont pour enveloppe des courbes dont les centres de courbure sont sur un cercle, dit *cercle des rebroussements*, tangent, au centre instantané de rotation, aux deux courbes fixe et mobile. Ici ce cercle doit contenir le centre de courbure de la courbe enveloppée par la droite IM, c'est-à-dire le point O; il coïncide donc avec le cercle décrit sur IO comme diamètre. Le cercle des inflexions, symétrique

du précédent, par rapport à la droite IM, est donc connu lui aussi.

Or, de la connaissance de ce cercle, on déduit la solution de n'importe quelle question relative à la courbure des roulettes et, par suite, si l'on veut, de nouvelles constructions du cercle osculateur des courbes considérées.