NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. D'OCAGNE

Épi- et hypocycloïde associées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15 (1915), p. 433-439

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__433_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[M¹8a] [M⁴aα]

ÉPI- ET HYPOCYCLOÏDE ASSOCIÉES;

PAR M. M. D'OCAGNE.

1. Soient γ et γ' deux cercles de centre ω et ω' et de même rayon r, roulant l'un extérieurement, l'autre intérieurement sur un cercle Γ, de centre O et de rayon R, qu'ils touchent constamment au même point I. Si M et M′ sont les points marqués sur ces cercles, qui, à l'origine du mouvement, coïncidaient avec le point A du cercle Γ, ces points engendrent l'un une épicycloïde (M), l'autre une hypocycloïde (M′) qui peuvent être dites *associées*.

On sait qu'à chaque instant les coordonnées, rapportées aux axes que définit la figure, sont données, si l'on désigne par φ l'angle AOI, pour le point M, par

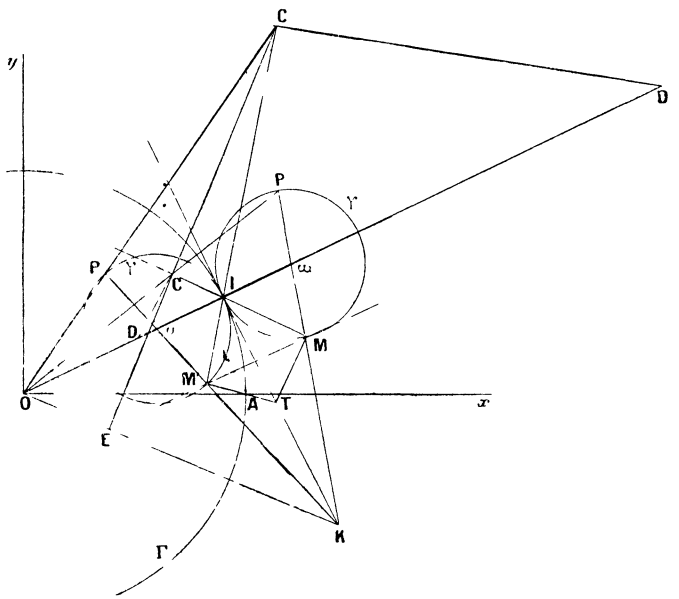
$$(1)\qquad \begin{cases} x = (R + r)\cos\varphi - r\cos\dfrac{(R + r)\varphi}{r}, \\ y = (R + r)\sin\varphi - r\sin\dfrac{(R + r)\varphi}{r} \end{cases}$$

et, pour le point M′, par

$$(1')\qquad \begin{cases} x' = (R - r)\cos\varphi + r\cos\dfrac{(R - r)\varphi}{r}, \\ y' = (R - r)\sin\varphi - r\sin\dfrac{(R - r)\varphi}{r}. \end{cases}$$

Rappelons que les normales en M et en M′ aux courbes considérées sont les droites MI et M′I, et que, par application de la construction générale dite *de*

Savary, les centres de courbure correspondants C et C′ sont déterminés sur ces normales respectivement



par les droites unissant le centre O du cercle-base aux points P et P′ diamétralement opposés à M et M′ dans les cercles γ et γ'.

2. On voit immédiatement que *le point* E *où la droite* MM′ *touche son enveloppe se trouve sur la droite unissant les centres de courbure* C *et* C′ *correspondants*.

En effet, les tangentes en M et en M′ aux courbes associées se coupent en un point T de la tangente commune aux cercles. Or, il est clair que *si les tangentes aux lieux des sommets d'un triangle variable sont concourantes, les points où les côtés de ce triangle*

touchent leurs enveloppes sont en ligne droite. Cela résulte immédiatement du fait que deux positions infiniment voisines du triangle variable sont homologiques puisque les droites unissant, de l'une à l'autre, les sommets correspondants sont concourantes (1).

Ainsi, les points E, C, C′ sont en ligne droite et l'on a la relation

$$\frac{EM.C'M'.CI}{EM'.C'I.CM} = 1.$$

D'autre part, les triangles MIω et M′Iω′, respectivement coupés par les transversales OCP et OC′P′, donnent

$$(2) \qquad 2\frac{R+r}{R}\frac{CI}{CM} = 1 \qquad \text{et} \qquad 2\frac{R-r}{R}\frac{C'I}{C'M'} = 1,$$

---

(1) Cette remarque est celle que j'avais déjà en vue en posant le 2° de la question 2169 (*N. A.*, 1911, p. 93), et, puisque j'en trouve ici l'occasion, je reviens sur cette question dont une solution, due à M. Abramescu, a déjà été donnée (*Ibid.*, p. 475) beaucoup moins simple que celle que voici : Si les tangentes MA et MB menées de M aux courbes (A) et (B) sont égales, le théorème général que j'ai donné dans les *N. A.* en 1890 (p. 290) montre que la normale au lieu de (M) passe par le barycentre des centres de courbure α et β correspondants, affectés des masses — 1 et 1, c'est-à-dire est parallèle à αβ. Cela démontre la première partie du théorème que Mannheim, ainsi que l'a fait remarquer M. Abramescu, avait retrouvée de son côté (*Développements de Géométrie cinématique*, 1894, p. 56), mais qui, on le voit, n'était que la particularisation pure et simple de mon énoncé entièrement général de 1890.

Pour la seconde partie, il suffisait de remarquer que, d'après le même théorème général appliqué aux normales NA et NB, aussi égales entre elles, la normale au lieu décrit par N était parallèle à AB et, par suite, que la tangente à ce lieu passait par M (ce qui résulte aussi, si l'on veut, de ce que le lieu de N est celui du centre d'un cercle tangent aux deux courbes en A et B). Dès lors, la remarque ci-dessus prouve que les côtés AB, NA, NB du triangle NAB touchent leurs enveloppes en des points en ligne droite, et cela démontre la seconde partie de la question 2169.

ce qui transforme l'égalité précédente en

$$\frac{EM}{EM'} = \frac{R + r}{R - r}. \tag{3}$$

Cette égalité conduit à cette construction bien simple du point E : *si les diamètres* MP *et* M'P' *se coupent en* K (*nécessairement sur* IT), *le point* E *se trouve sur* OK.

On déduit de là une détermination facile de l'enveloppe de MM', lieu du point E.

En effet, si nous représentons par (x, y), (x', y') et (x_1, y_1) les coordonnées des points M, M' et E, nous avons, en vertu de (2),

$$\frac{x - x_1}{x' - x_1} = \frac{R + r}{R - r}$$

ou

$$2rx_1 = (R + r)x' - (R - r)x$$

et, par suite, en tenant compte de (1) et (1'),

$$x_1 = \frac{R + r}{2}\cos\frac{(R - r)\varphi}{r} + \frac{R - r}{2}\cos\frac{(R + r)\varphi}{r}.$$

On trouve de même

$$y_1 = \frac{R + r}{2}\sin\frac{(R - r)\varphi}{r} + \frac{R - r}{2}\sin\frac{(R + r)\varphi}{r}.$$

Il suffit de poser $\frac{R - r}{2} = R_1 - r_1$, $\frac{R + r}{2} = r_1$ (ce qui donne $R = R_1$), puis $\frac{(R + r)\varphi}{r} = \varphi_1$, pour mettre x_1 et y_1 sous la forme

$$x_1 = (R_1 - r_1)\cos\varphi_1 + r_1\cos\frac{(R_1 - r_1)\varphi_1}{r_1},$$

$$y_1 = (R_1 - r_1)\sin\varphi_1 - r_1\sin\frac{(R_1 - r_1)\varphi_1}{r_1},$$

formules qui montrent que *le point* E *a pour lieu une*

hypocycloïde engendrée par un cercle de rayon r_1, *ou* $\frac{R+r}{2}$, *roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon* R_1, *ou* R. A l'origine du mouvement le point E coïncide d'ailleurs, comme les points M et M', avec le point A.

3. Si nous représentons par ds et ds' les différentielles des arcs décrits simultanément par les points M et M', nous avons

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{EM.MT}{EM'.M'T} = \frac{EM}{EM'}$$

ou, d'après (3),

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{R+r}{R-r}.$$

Donc, en intégrant et remarquant que s et s' s'annulent en même temps en A,

$$\frac{s}{s'} = \frac{R+r}{R-r}. \tag{4}$$

Considérons de même les différentielles $d\sigma$ et $d\sigma'$ des aires balayées simultanément par les segments IM et IM' des normales en M et M'.

Nous avons

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\overline{CM}^2 - \overline{CI}^2\right) d\theta,$$

$d\theta$ étant la différentielle de l'angle que MI fait avec Ox, ou, si nous remplaçons $\overline{CM}^2 - \overline{CI}^2$ par le produit $(CM + CI)(CM - CI)$,

$$d\sigma = \frac{CM + CI}{2} IM\, d\theta.$$

Mais la première formule (2) donne

$$(5)\quad \frac{CM}{2(R+r)} = \frac{CI}{R} = \frac{CM-CI}{2(R+r)-R} = \frac{IM}{R+2r} = \frac{CM+CI}{3R+2r}.$$

La précédente devient donc

$$d\sigma = \frac{(3R+2r)\,\overline{IM}^2}{2(R+2r)}\,d\theta.$$

On aurait de même

$$d\sigma' = \frac{(3R-2r)\,\overline{IM'}^2}{2(R-2r)}\,d\theta'.$$

En divisant membre à membre, et puisque $IM = IM'$, on a

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'} = \frac{(3R+2r)(R-2r)}{(3R-2r)(R+2r)}\,\frac{d\theta}{d\theta'}.$$

Mais, dS étant la différentielle de l'arc décrit par le point I, si les normales aux enveloppes de IM et IM', c'est-à-dire les perpendiculaires élevées à IC et IC', coupent en D et en D' la normale OI au lieu de I, on a

$$dS = ID\,d\theta = ID'\,d\theta',$$

ou, puisque les triangles rectangles ICD et IC'D' sont semblables,

$$CI\,d\theta = C'I\,d\theta',$$

ou, en vertu de (5) et de la formule analogue pour C'I,

$$\frac{R}{R+2r}\,d\theta = \frac{R}{R-2r}\,d\theta',$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\theta}{d\theta'} = \frac{R+2r}{R-2r}.$$

Dès lors, la formule précédente devient

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'} = \frac{3R+2r}{3R-2r},$$

d'où, par intégration et remarquant encore que σ et σ' s'annulent ensemble en A,

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{3R + 2r}{3R - 2r}. \tag{6}$$

4. Dans le cas où $r = \frac{R}{2}$, l'hypocycloïde (M') se réduit au diamètre, aboutissant en A, du cercle Γ, en vertu du théorème généralement dit de La Hire, bien que donné, dès 1570, par Cardan, dans son *Opus novum de proportionibus numerorum* (p. 186). Quant à l'épicycloïde (M), elle est alors celle dont Huygens a reconnu l'identité avec la caustique par réflexion du cercle pour des rayons lumineux parallèles (*Œuvres*, t. VIII, p. 214), et qui a reçu depuis lors, de Proctor, le nom de *néphroïde* en raison de sa forme rappelant celle d'un rein.

Dans ce cas, la première formule (2), la formule (4) et la formule (6) donnent respectivement

$$CM = 3CI, \qquad s = 3s', \qquad \sigma = 2\sigma'.$$

Or, ici, s' représente le segment du diamètre du point A compris entre les deux positions considérées du point M', σ' l'aire limitée, entre le même diamètre et le cercle Γ, par les perpendiculaires à ce diamètre menées par ces deux positions. En particulier, la longueur de l'arc limitant chacun des deux lobes de la néphroïde est triple de celle du diamètre du cercle Γ, l'aire comprise à l'intérieur de chacun de ces lobes est égale à celle du même cercle, de telle sorte que l'aire totale de la néphroïde est triple de celle du cercle Γ. On retrouve ainsi, à titre de cas particuliers des formules ci-dessus, certains résultats démontrés d'autre façon par M. Balitrand dans une Note récente sur la néphroïde (même Tome, p. 97).