

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 369-376

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__369_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1307.

(1878, p. 563.)

On donne la distance des centres et les rayons de deux circonférences (C) et (C') intérieures l'une à l'autre; une droite AB, de longueur constante, se déplace de manière que ses extrémités A et B restent respectivement sur (C) et sur (C') : on demande l'expression de la surface comprise entre une position initiale et une position finale de la droite AB et les deux circonférences. En déduire la position initiale de la droite AB pour que l'aire correspondant à un déplacement de 120° sur la circonférence intérieure soit maximum.

L. VANDENPEEREBOOM.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Ce problème attend sa solution depuis près de quarante ans, et je doute fort qu'il en obtienne jamais une. Il suffit, en effet, de réfléchir à l'entière indépendance des données R , R' , $CC' = d$ et $AB = a$, pour juger de l'extraordinaire complication de la recherche ici proposée.

La condition que (C) et (C') soient intérieures l'une à l'autre est une pure illusion, car le problème existe aussi bien pour des circonférences (C) et (C') extérieures l'une à l'autre. On conçoit très bien la définition d'une aire limitée à deux arcs de ces cercles et à deux positions de la droite AB.

Le problème ne diffère pas de celui de la bielle appuyée à deux cercles, et transmettant le mouvement de l'un à l'autre par deux manivelles CA et C'B de longueurs R et R' , mais la complication de l'étude résulte du fait que, pour une position donnée de AB, il y en a d'autres AB', BA' et leurs symétriques par rapport à CC', qui conviennent aussi bien au point de vue géométrique.

Le lieu d'un point M de la bielle AB est, comme on le sait, une courbe de Watt, du sixième degré, décomposable, il est vrai, en certaine hypothèse particulière. Quant à l'enveloppe de cette droite, elle est à peu près inabordable et je ne crois pas qu'il soit possible de l'amener au moindre résultat pratique.

1676.

(1894, p. 4*.)

Trouver, sur une conique, le point le plus éloigné et le point le plus rapproché d'un point donné situé hors de son plan.

A. CAZAMIAN.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Soient (C) une conique, M un point de l'espace, P sa projection sur le plan de la conique.

Le maximum et le minimum cherchés correspondent à ceux de la génératrice du cône de sommet M et de base (C).

Soient MD une génératrice et DT la tangente en D à la conique.

Pour que MD soit un maximum, il faut que MD soit perpendiculaire à DT. Mais alors PD, à son tour, est aussi perpendiculaire à DT.

Le point D sera donc le pied de la plus grande normale issue de P à la conique (C).

Conclusion analogue pour la normale minima PD'.

Soient

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

l'équation de la conique (C) supposée une ellipse, et (α , β) les coordonnées du point P.

Les pieds des normales issues de P seront situés aux rencontres de l'ellipse avec l'hyperbole équilatère

$$(a^2 - b^2)xy = a^2 \alpha y - b^2 \beta x$$

ou hyperbole d'Apollonius, qui passe par le centre de l'ellipse et par le point P, et a ses asymptotes parallèles aux axes de l'ellipse.

L'hyperbole rencontre toujours l'ellipse au moins en deux points D et D', de sorte que le problème proposé sera tou-

jours possible, quels que soient le point M de l'espace et sa projection P sur le plan de la conique.

1704.

(1895, p. 39*)

1° Dans tout triangle, on a

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Quand l'égalité a lieu le triangle est équilatéral.

2° Trois nombres positifs quelconques a, b, c étant donnés, on a

$$(a + b - c)(c + a - b)(b + c - a) - abc \leq 0.$$

Quand l'égalité a lieu, on a

$$a = b = c.$$

WEILL.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

1° a, b, c désignant les côtés d'un triangle, R le rayon du cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit, S la surface, et $2p$ le périmètre ($a + b + c$), on a, par des formules connues,

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \dots,$$

$$abc = 4RS,$$

et l'inégalité à démontrer devient alors

$$8(p-a)(p-b)(p-c) < abc$$

ou

$$8S^2 < 4pRS$$

ou

$$2S < pR$$

ou

$$2r < R.$$

Autrement dit, dans tout triangle scalène, le diamètre du cercle inscrit est inférieur au rayon du cercle circonscrit, ce

qui résulte, en effet, de la définition du cercle d'Euler, ou cercle des neuf points, dont le rayon est moitié de celui du cercle circonscrit. Mais, d'après le théorème de Feuerbach, ce cercle touche et enveloppe le cercle inscrit. Ainsi donc

$$2r < R,$$

et l'égalité $2r = R$ n'a lieu que si $a = b = c$, c'est-à-dire pour le triangle équilatéral.

2° Les nombres a, b, c étant maintenant quelconques, mais positifs, soit $b + c - a = a', \dots$

L'inégalité à démontrer se réduira à

$$a'b'c' - abc < 0.$$

Elle aura lieu notamment : 1° pour $a > b + c$; 2° pour $a = b + c$; 3° pour $a < b - c$; 4° pour $a = b - c$; etc., comme on le vérifiera directement, ainsi que dans les *Questions d'Algèbre* de M. Deshoves.

Note. — On pourra s'étonner qu'il ait fallu attendre vingt ans pour obtenir une réponse à la question 1704, mais la raison en est simple, c'est que, par une déplorable inattention, l'énoncé 1704 comprenait trois parties, celles désignées ci-dessus 1° et 2° et une troisième non séparée de la deuxième, et, pourtant d'un objet complètement étranger, qu'il sera sans doute expédient de rééditer, cette fois, sous un numéro spécial, tel que 1704 bis ⁽¹⁾. Cette fâcheuse confusion s'est présentée ailleurs dans ce journal et dans d'autres recueils analogues, et a, pareillement, retardé la solution des questions ainsi enchevêtrées.

1733

(1896, p. 314.)

Étant donné un cercle dont le diamètre AC est vertical, deux points pesants partent du repos en A et en B, et décrivent les deux cordes complémentaires AB, BC; les deux mobiles seront sur une même verticale au bout d'un temps indépendant de la position B sur la circonférence.

B. NIEWENGLOWSKI.

(¹) Voir pp. 244, 246, 288.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

En vertu du théorème classique du tautochronisme des cordes d'un cercle vertical, issues du point le plus haut ou aboutissant au point le plus bas, le mobile A parviendra en B dans le même temps que le mobile B parviendra en C.

Décrivons un cercle sur OB comme diamètre. Il rencontrera AB et BC en leurs milieux M et N. Mais, dans ce cercle OMBN, les cordes ON, BN sont parcourues dans le même temps, donc aussi les demi-cordes AM, BN du cercle primitif.

La droite MN est donc la verticale sur laquelle les deux mobiles A, B se retrouveront simultanément, quelle que soit la situation du point B.

Le lecteur est prié de faire la figure.

REMARQUE. — On pourrait aussi écrire les équations des mouvements des deux points sur les deux plans inclinés

$$AM = \frac{1}{2} g t^2 \cos A, \quad BN = \frac{1}{2} g t^2 \sin A,$$

d'où

$$\frac{AM}{BN} = \cot A = \frac{AB}{BC}.$$

Les deux points seront donc sur une même verticale, équidistante de AC et de la verticale de B, lorsque

$$\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}.$$

Cela se produira à l'instant exprimé par

$$t = \sqrt{\frac{AC}{g}}.$$

C.-A. L.

1799.

(1898, p. 244.)

Trouver toutes les courbes qui sont homothétiques à leurs développées.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Cette question a depuis longtemps et à diverses reprises sollicité l'attention des géomètres; aussi en a-t-il été donné des solutions tant pour l'homothétie que pour la similitude ou pour l'identité de certaines courbes avec leurs développées. Je ne vois rien à y ajouter; c'est pourquoi il suffira sans doute de renvoyer le lecteur aux recueils où se trouvent les éléments d'une étude complète. Voir, notamment, les réponses à deux questions analogues, 2545 et 3335, posées dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1903, p. 195 et 220, et 1908, p. 117.

Les courbes ici visées sont des épicycloïdes et des hypocycloïdes.

La question a été traitée et généralisée par A. Puiseux et par M. Haton de la Goupillière.

Enfin, dans le présent Journal, G. Pirondini l'a aussi résolue au cours d'une *Note géométrique*, 1886, p. 460-480.

1827.

(1899, p. 388.)

Six points quelconques étant donnés sur un plan, le lieu géométrique des points tels qu'en les joignant aux six points donnés, on obtienne un faisceau en involution, se compose de quinze courbes du troisième ordre, qui passent toutes par les six points donnés.

E. DEWULF.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Cette question a été déjà proposée sous le numéro **1347** (1880, p. 432) et résolue (1881, p. 428).

A ces deux endroits, l'énoncé **1347** a été inexactement imprimé avec le mot *cubiques* à la place du mot *courbes*.

Cette rectification n'a pas été faite, que je sache.

1856.

(1900, p. 382).

Des poids 1, 1, 2, 3, 5, . . . , u_n , mesurés par des nombres qui forment la suite de Fibonacci, sont respectivement

appliqués sur des points d'une droite qui a pour abscisses 1, 2, 3, ..., n. On demande de déterminer la position du barycentre de ce système. C.-A. LAISANT.

SOLUTION

Par M C.-A. LAISANT.

Cette question, vieille de bientôt quinze ans, est jusqu'ici restée sans réponse. A la demande d'un de nos plus fidèles correspondants, j'en donne une ci-dessous, en rappelant que la série récurrente de Fibonacci est une mine, pour ainsi dire inépuisable, d'exercices intéressants d'Algèbre et d'Arithmétique, et qu'elle mériterait sans doute d'être moins délaissée des étudiants en Mathématique qu'elle ne semble l'être aujourd'hui.

La solution est d'ailleurs simple. Il s'agit de déterminer uniquement l'abscisse du barycentre G sur la droite OX par la formule

$$OG = x = \frac{\sum_1^n n u_n}{\sum_1^n u_n}.$$

Or, en écrivant

$$1 = 2 - 1, \quad 1 = 3 - 2, \quad \dots, \quad u_n = u_{n+2} - u_{n+1},$$

et ajoutant ces égalités, on a immédiatement

$$\sum_1^n u_n = u_{n+2} - 1,$$

résultat bien connu, et pour ainsi dire classique.

Appelant, en général, S_n cette somme $1 + 1 + \dots + u_n$, nous avons

$$\begin{aligned} 1 + 1 + \dots + u_n &= S_n, \\ 1 + \dots + u_n &= S_n - S_1, \\ 2 + \dots + u_n &= S_n - S_2, \\ &\dots, \\ u_{n-1} + u_n &= S_n - S_{n-2}, \\ u_n &= S_n - S_{n-1}. \end{aligned}$$

Ajoutant, et remplaçant les S_i par $u_{i+2} - 1$, on obtient

$$\sum_1^n n u_n = n u_{n+2} - u_{n+3} + 2,$$

et, par conséquent,

$$x = \frac{n u_{n+2} - u_{n+3} + 2}{u_{n+2} - 1} = n - 1 - \frac{u_{n+1} - (n+1)}{u_{n+2} - 1}.$$

Si $OA_p = p$, on a

$$A_{n-2}G = x - (n-2) = \frac{u_n + n}{u_{n+2} - 1}.$$

Pour $n = 4$, cette valeur est 1. Pour $n > 4$, elle est toujours inférieure à l'unité, c'est-à-dire que l'abscisse du barycentre est comprise entre $n-2$ et $n-1$.

2166.

(1910, p. 528.)

La polaire d'un point M d'une ellipse par rapport à son cercle de Monge passe par le symétrique du centre de courbure en M par rapport à M. E.-N. BARISIEN.

NOTE

Par LA RÉDACTION.

Un article (Correspondance, 1911, p. 222) rappelle que ce théorème a été publié par Steiner (*Journal de Crelle*, t. 30, 1845, p. 271-272).
