F. BALITRAND

Sur la spirale tractrice et sur une courbe associée

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 347-354

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__347_1>

[M^4e]

SUR LA SPIRALE TRACTRICE ET SUR UNE COURBE ASSOCIÉE;

PAR M. F. BALITRAND.

La spirale tractrice est caractérisée par la propriété suivante : la portion de tangente MT, comprise entre le point de contact M et le point de rencontre T de cette tangente avec la perpendiculaire OT, élevée au rayon vecteur OM, par le pôle O, est constante.

D'après M. Gomes Teixeira [1], cette courbe a été étudiée par Varignon, puis par Cotes dans l'*Harmonia mensurarum*. Ce dernier a pris comme définition cette propriété « qu'un arc quelconque, compté à partir du point de rebroussement, est proportionnel au logarithme du rayon vecteur de son extrémité ». Dans les *Nouvelles Annales*, elle a fait l'objet d'articles de Giard (1862, p. 70), de Rouquel (1863, p. 499), de Laquière (1863, p. 549). M. Gomes Teixeira lui a consacré (*loc. cit.*) un Chapitre de son Traité.

[1] *Traité des courbes spéciales remarquables*, t. II, p. 90.

La spirale tractrice est un cas particulier de la tractrice circulaire. — En effet, si l'on désigne par $2a$ la longueur constante MT et si N est le milieu de MT, on a

$$\mathrm{ON} = \mathrm{MN} = a;$$

donc le lieu du point N est un cercle de centre O. La courbe est par suite une tractrice circulaire particulière, correspondant au cas où le segment de longueur constante est égal au rayon du cercle que décrit une de ses extrémités.

La propriété caractéristique de la spirale se traduit par

$$(1) \qquad r = 2a \cos \mathrm{V};$$

r est le rayon vecteur et V l'angle sous lequel il coupe la courbe.

Cette relation si simple permet de retrouver ses propriétés essentielles plus rapidement que son équation polaire, assez compliquée. Rappelons les formules

$$\operatorname{tang} \mathrm{V} = \frac{r\,d\omega}{dr},$$

$$\sin \mathrm{V} = \frac{r\,d\omega}{\sqrt{dr^2 + r^2\,d\omega^2}} = \frac{r\,d\omega}{ds},$$

$$\cos \mathrm{V} = \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2\,d\omega^2}} = \frac{dr}{ds},$$

où ω désigne l'angle polaire du point M. De la relation (1) on déduit

$$dr = -2a \sin \mathrm{V}\, d\mathrm{V}.$$

Par suite

$$ds = -2a \operatorname{tang} \mathrm{V}\, d\mathrm{V}, \qquad s = 2a \log \cos \mathrm{V} = 2a \log \frac{r}{2a},$$

en comptant les arcs à partir du point de rebroussement de la courbe. Cette formule établit le théorème de Cotes cité plus haut. On peut encore l'écrire

$$r = 2ae^{\frac{s}{2a}}.$$

Appelons r_1 et V_1 les éléments, analogues à r et V, de la courbe dont la spirale est la podaire. En vertu de (1) et de la propriété fondamentale des podaires, on a

$$r_1 \operatorname{tang} V_1 = 2a, \qquad V_1 = V.$$

Mais la première de ces relations exprime que la sous-tangente polaire de la courbe (r_1, V_1) est constante, propriété caractéristique de la spirale hyperbolique. Donc :

La spirale tractrice est la podaire de la spirale hyperbolique par rapport à son pôle.

Si maintenant r_1 et V_1 désignent les éléments de la courbe inverse de la spirale tractrice, on a

$$r_1 \cos V_1 = -2a, \qquad V_1 = \pi - V.$$

Mais $r_1 \cos V_1$ représente la distance du pôle à la normale à la courbe (r_1, V_1); cette normale enveloppe donc un cercle; autrement dit la courbe (r_1, V_1) est une développante de ce cercle. Ainsi :

La spirale tractrice est l'inverse de la développante d'un cercle, par rapport au centre de ce cercle.

De la relation

$$\sin V = \frac{r\,d\omega}{ds}$$

on déduit sans peine

$$d\omega = -\operatorname{tang}^2 V\,dV, \qquad \omega = V - \operatorname{tang} V.$$

Ensuite, en appelant α l'angle que fait la tangente avec l'axe polaire et ρ le rayon de courbure en M, on a

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}, \qquad \alpha = \omega + V;$$

d'où

$$\rho = -a \operatorname{tang} 2V;$$

ce qui fournit, pour le centre de courbure de la spirale, la construction suivante :

Le centre de courbure C, *en* M, *est à l'intersection de la normale en ce point et de la droite qui joint le pôle* O *au milieu* N *de la tangente* MT; ou, ce qui revient au même :

Le rayon de courbure en M *est égal à la portion de la perpendiculaire, élevée en* O *à* OM, *comprise entre le pôle* O *et la tangente* MT.

Il convient de noter, à cause de leur simplicité, les relations

$$\frac{ds}{d\omega} = 2a \cot V, \qquad \frac{d\omega}{dV} = -\operatorname{tang}^2 V = -\frac{HT}{HM},$$

H étant le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur MT. Au moyen des formules ci-dessus, on arrive à la construction du *centre de courbure de la développée de la spirale*. En effet, si ρ_1 et s_1 désignent le rayon de courbure et l'arc de cette développée, on sait que

$$ds_1 = d\rho, \qquad \rho_1 = \frac{ds_1}{d\alpha}.$$

Après quelques calculs faciles on trouve

$$\rho_1 = \frac{2a \cos^2 V}{\cos^3 2V};$$

ce qui conduit à la détermination suivante du rayon de courbure :

Mener par le point O *une parallèle à* MT *et par le point* C *une perpendiculaire à* OC; *ces deux droites se coupent en un point* α; *la droite* αN *coupe la normale en* C *en* C_1; CC_1 *est égal au rayon de courbure.*

En effet, les deux triangles semblables NCC_1, $NO\alpha$ donnent

$$\frac{CC_1}{O\alpha} = \frac{NC}{ON}, \qquad CC_1 = \frac{NC}{ON} \times \frac{OC}{\cos 2V} = \frac{NC(ON + NC)}{ON \cos 2V};$$

en remplaçant ON et NC par leurs valeurs en fonction de V, on trouve bien

$$\rho_1 = CC_1 = \frac{2a \cos^2 V}{\cos^3 2V}.$$

Proposons-nous enfin de trouver l'équation tangentielle polaire de la spirale, c'est-à-dire la relation entre la distance p du pôle à la tangente et l'angle φ de la normale avec l'axe polaire. Dans le triangle OHN on a

$$OH = p, \qquad HN = \frac{dp}{d\varphi};$$

d'où

$$(2) \qquad p = a \sin 2V, \qquad \frac{dp}{d\varphi} = 2a \cos^2 V.$$

On en déduit l'équation différentielle

$$\left(\frac{dp}{d\varphi}\right)^2 - 2a \frac{dp}{d\varphi} + p^2 = 0;$$

d'où

$$d\varphi = \frac{dp}{a \pm \sqrt{a^2 - p^2}}$$

et, en intégrant,

$$\varphi - \varphi_0 = 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{a \pm \sqrt{a^2 - p^2}}{p} - \frac{a \pm \sqrt{a^2 - p^2}}{p};$$

c'est l'équation cherchée; mais il est plus commode, pour les applications, d'utiliser les formules (2).

Supposons maintenant que la spirale roule sur la tangente MT comme base et proposons-nous d'étudier la roulette (O) décrite par le pôle. De la définition de la spirale, il résulte que cette roulette est caractérisée par la propriété suivante :

La tangente et la normale en chaque point de la courbe, détachent sur la base un segment de longueur constante $2a$ [1].

Les coordonnées d'un point de la roulette sont données par les formules

$$x = \int p\, d\varphi, \qquad y = p;$$

ou bien, puisque, en vertu des formules (2),

$$d\varphi = \frac{\cos 2\mathrm{V}}{\cos^2 \mathrm{V}} d\mathrm{V} = \left(2 - \frac{1}{\cos^2 \mathrm{V}}\right) d\mathrm{V},$$

par

$$dx = 2a\left(\sin 2\mathrm{V} - \frac{\sin \mathrm{V}}{\cos \mathrm{V}}\right) d\mathrm{V}, \qquad y = a \sin 2\mathrm{V}.$$

En intégrant on obtient

$$x = -a \cos 2\mathrm{V} + a \log \cos^2 \mathrm{V}, \qquad y = a \sin 2\mathrm{V}.$$

Si $d\sigma$ désigne l'élément d'arc de la roulette, on a

$$d\sigma = \frac{r}{\rho} ds;$$

---

[1] Cette courbe est connue. *Voir* TISSERAND, *Recueil complémentaire d'exercices sur le Calcul infinitésimal*, p. 223. Pour les formules employées ici, se reporter à un article récent des *Nouvelles Annales : Note sur la théorie des roulettes*, etc.

et, en remplaçant r, ρ, ds par leurs valeurs en fonction de V,

$$d\sigma = \frac{2a\cos 2V}{\cos V}dV.$$

Quant au rayon de courbure de la roulette qui a pour expression

$$R = \frac{r^2}{\rho\sin V - r},$$

il devient, en y remplaçant r et ρ par leurs valeurs,

$$R = -\frac{2a\cos 2V}{\cos V}.$$

Cette formule conduit à la construction suivante :

Élever au point M *une perpendiculaire à* OM *qui coupe* ON *en* N'; *la perpendiculaire abaissée de* N' *sur la base coupe* OM *au centre de courbure* γ.

On peut encore dire que :

La perpendiculaire élevée à la base par le point N *passe par le milieu* I *du rayon de courbure.*

Et aussi que :

La projection sur la base du rayon de courbure est double de la projection de ON.

L'expression du rayon de courbure R peut s'écrire

$$R = -4a\cos V + \frac{2a}{\cos V}.$$

En la différentiant on obtient

$$\frac{dR}{dV} = 4a\sin V + \frac{2a\sin V}{\cos^2 V}.$$

On a

$$R_1 = -\frac{dR}{dV},$$

en appelant R_1 le rayon de courbure de la développée de la roulette O; ce qui donne pour ce rayon de courbure la construction suivante :

La perpendiculaire élevée à OM *par le milieu* K *de* OI *coupe la base en* L; *la droite* IL *passe par le milieu du rayon de courbure de la développée.*

En effet, les triangles semblables MOT, MKL donnent

$$\frac{KL}{OT} = \frac{KM}{OM}$$

ou bien

$$KL = \operatorname{tang} V \times KM.$$

Mais

$$KM = OM + \frac{R}{4} = a\cos V + \frac{a}{2\cos V},$$

donc

$$KL = a\sin V + \frac{a\sin V}{2\cos^2 V} = \frac{R_1}{4},$$

ce qui démontre le théorème ci-dessus.

Le segment ON est égal à a. Il a une longueur constante et, lorsque le point O décrit la roulette (O), une de ses extrémités se déplace sur cette courbe, tandis que l'autre reste sur la base. Pour un déplacement infiniment petit, le point I est le centre instantané de rotation et le cercle circonscrit au quadrilatère inscriptible INKL est le cercle des inflexions; on le vérifie aisément. On peut donc construire la normale à la courbe décrite par le point I (c'est la droite IL), ainsi que le point de contact et le centre de courbure de la courbe enveloppée par le segment ON.