

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 330-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__330_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

439.

(1878, p. 187.)

On donne le périmètre et l'axe d'une ellipse, calculer l'autre axe soit par une série convergente, soit par des approximations successives.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Il n'existe, on le sait, aucune expression finie de la longueur d'un arc ou du périmètre L de l'ellipse d'axes $2a$ et $2b$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Dans tous les éléments de calcul intégral, on trouve la série

$$L = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 - \dots \right].$$

Si donc on donne l'axe focal $2a$, on déterminera e^2 et, par suite, $b^2 = a^2(1 - e^2)$ par une équation de degré $(2m - 2)$ correspondant aux m premiers termes de la série.

Cette recherche deviendra impraticable dès qu'on aura seulement pris plus de trois termes.

Quant à représenter e^2 par une série ordonnée par rapport aux puissances de L , cela se fera par la méthode du retour des suites. La série ainsi obtenue donnera la meilleure approximation désirée suivant le nombre de termes que l'on prendra.

Le peu d'intérêt de cette approximation nous dispensera de poursuivre et d'achever une pareille recherche qui est, pour ainsi dire, sans objet.

Note du Rédacteur. — Nous croyons que cette question bien ancienne pouvait correspondre à un intérêt pratique très réel. Dans l'art des constructions, dans les problèmes que présentent les organes des machines, il peut fort bien arriver

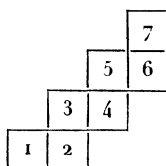
qu'on ait à déterminer les éléments d'une ellipse dont on connaît un axe et le périmètre, avec une approximation suffisante.

C.-A. L.

511.

(1860, p. 46.)

Soient sept carrés égaux, de telle sorte chaque carré peut tourner à charnière seulement autour de la droite



qui lui est commune avec le carré voisin; le carré 1 ne pourra prendre une position quelconque qu'envers le carré 7, et pas envers les autres carrés. Ainsi, si le carré 1 est maintenu fixe, il n'y a que le carré 7 qui soit entièrement libre.

MÖBIUS.

NOTE

Par M. C.-A. LAISANT.

J'ai tenu à reproduire, sans y changer une syllable, cet énoncé qui a depuis trop longtemps encombré la liste des questions, et n'aurait jamais dû être inséré. Il est très probablement le résultat d'une traduction faite par une personne ignorant la langue française et dépourvue de toute précision d'esprit.

Qu'est-ce que signifie la rotation possible d'un carré autour de *la droite* commune avec le carré voisin, alors que pour 5 de ces carrés sur 7, il y a deux côtés communs et non pas un seul?

Dans cette rotation, le carré mobile tourne-t-il isolément, ou entraîne-t-il avec lui tout le reste du système, par une sorte de pliage?

Qu'appelle-t-on une *position quelconque* du carré 1, qu'on s'empresse aussitôt de rendre fixe, *envers* le carré 7, ou tout autre?

Comment, enfin, un élément qui appartient à un système à liaisons, serait-il *entièrement libre*?

Il ne faut pas chercher à répondre. Il n'y a qu'à biffer la question définitivement. Nos lecteurs ne sauraient être invités à deviner des rébus rédigés en charabia.

882 à 885.

(1868, p. 240.)

882. *La suite des nombres premiers 2, 3, 5, 17, 257, ... est-elle illimitée? Ou autrement, y a-t-il une infinité de nombres impairs par lesquels une circonférence peut être divisée en parties égales au moyen de la règle ou du compas?*

883. *Tout nombre pair est-il la somme de deux nombres premiers impairs?*

884. *8 et 9 sont-ils les seuls entiers consécutifs qui soient des puissances des nombres entiers?*

885. *Y a-t-il au moins deux nombres premiers parmi les entiers compris entre les carrés de deux entiers consécutifs?*

NOTE

Par la RÉDACTION.

Ces quatre questions, signées *Lionnet*, *Algèbre*, 3^e Ed^{on}, sont précédées de la mention : « Questions d'arithmologie qui n'ont jamais été résolues. »

883 est connue sous le titre de : *Théorème empirique de Goldbach*, et **884** sous celui de : *Théorème empirique de Catalan*. **885** avait été résolue en 1855 par Desboves, dans un article *Sur un théorème de Legendre* (*N. A.*, 1855, p. 281-295).

Ces énoncés n'auraient jamais dû prendre place parmi les questions proposées dans les *Nouvelles Annales*. Ce sont des *desiderata* qu'on pouvait signaler, mais qui ont résisté jusqu'ici à de trop longues recherches pour qu'on pût espérer une réponse.

Bien entendu, aucune n'est parvenue. Dans un article spécial (1879, p. 354) *Lionnet*, sans du reste rappeler la question **883**, a repris l'examen du théorème de Goldbach, en essayant d'établir, contre l'avis presque unanime, qu'il y a probabilité que le théorème de Goldbach n'est pas vrai. Beau-

coup d'autres arithmologues, tout au contraire, croient que la décomposition d'un nombre pair en deux nombres premiers peut se faire de plusieurs manières, et que ces solutions sont d'autant plus nombreuses que les nombres pairs considérés deviennent plus grands.

Quoi qu'il en soit, les questions 882 à 884 doivent être considérées non pas comme résolues, mais comme liquidées, et disparaître définitivement de notre liste; et la question 885, comme on l'a vu plus haut, était résolue affirmativement treize années avant d'avoir été posée.

938.

(1869, p. 275.)

Deux ellipses sont situées dans le même plan; l'une est fixe et l'autre mobile autour de son centre. Dans chaque position de l'ellipse mobile, on mène les tangentes communes. On demande le lieu des points de rencontre.

Quand les ellipses sont extérieures, il y a deux tangentes extérieures et deux tangentes intérieures. Trouver le lieu des points de rencontre des premières tangentes et le lieu des points de rencontre des secondes. Examiner les cas particuliers.

DAUPLAY.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Soient (E) l'ellipse fixe rapportée à ses axes, (E') l'ellipse mobile autour de son centre I(u, v).

Un autre système d'axes pourra être proposé, ayant I pour origine, et formé des parallèles IX, IY aux axes de l'ellipse (E).

Ce nouveau système paraît préférable, parce qu'il supprime les deux paramètres u et v de l'équation de l'ellipse (E'). Il est vrai que l'ellipse (E), qui avait pour équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

aura maintenant pour équation

$$a^2(y + v)^2 + b^2(x + u)^2 = a^2b^2.$$

Cela posé, on suivra la méthode indiquée pour la question 829 et pour les problèmes analogues dont il a été fait mention (1915, p. 191), mais cette recherche présentera encore

une grande complication, pour aboutir, en fait, à un résultat peu en rapport avec le travail qu'il aura exigé.

1552.

(1885, p. 488.)

On donne une asymptote d'une hyperbole équilatère, un point de la courbe et une circonférence tangente à l'hyperbole; déterminer ses axes et ses foyers.

A...

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Soient A le point donné, BB' l'asymptote fixe, et C le cercle donné de centre I et de rayon r .

Il y a manifestement deux hyperboles équilatères AM, AM' passant par A, asymptotes à BB' et tangentes à C. Ainsi, le problème comporte deux solutions, bien qu'il n'en soit demandé ou prévu qu'une seule dans l'énoncé,

D'autre part, le lieu des pieds M, M' des normales issues du point I aux hyperboles équilatères ici définies est une cubique dont les intersections avec le cercle C représentent les deux points M, M' pouvant remplacer la donnée du cercle et permettant alors d'achever immédiatement la construction des deux hyperboles demandées.

De la description ci-dessus on conclut que le problème proposé n'est pas quadratique et ne saurait se ramener à une construction par la règle et le compas, ce qui est habituellement sous-entendu dans toutes les déterminations graphiques de coniques par des éléments convenablement choisis.

Le lecteur pourra, par manière de compensation, traiter les deux questions suivantes, modifications de la proposée :

I. On donne A, BB' et un autre point P.

La solution est immédiate et très simple. AP rencontre BB' en A', et la seconde asymptote en un point P', tel que P' soit symétrique de A' par rapport au milieu de AP. Le reste s'ensuit aisément par des moyennes proportionnelles, etc.

II. On donne A, BB' et une tangente TT'.

On est alors amené à faire intervenir le lieu des points de contact des tangentes parallèles à TT'. Ce lieu est une parabole passant par A et B, projection de A sur BB', et ayant son axe parallèle à BB'. Cette parabole est rencontrée par TT' en

deux points M, M' qui appartiennent à deux branches différentes des deux hyperboles répondant à la question.

1576.

(1888, p. III.)

Les coefficients de l'équation

$$x^5 + 5 \frac{a+b}{2} x^4 + 10p_2 x^3 + 10p_3 x^2 + 5p_4 x + p_5 = 0$$

sont liés par la relation

$$(10-r)p_r = \frac{1}{2}(11-2r)(a+b)p_{r-1} + (r-1)abp_{r-2},$$

où l'on suppose $p_0=1$ et $a > b$. Montrer que toutes les racines sont réelles et comprises entre $-a$ et $-b$.

D. EWARDES.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Pour des raisons bien connues, les équations du cinquième degré retiennent peu l'attention des étudiants. On l'a vu déjà ici sur les questions de ce genre posées à intervalles éloignés.

Quant à la présente, le lecteur l'aura certainement négligée à cause de l'omission manifeste de la définition du nombre p_1 ; car, d'après la relation indiquée, il faut partir de $r=2$, ce qui donne

$$8p_2 = 7p_1^2 + abp_0,$$

où l'on a bien spécifié $p_0=1$, mais p_1 n'a pas été défini, et il faut *deviner* que très probablement, d'après l'équation de l'énoncé, le terme en x^4 doit se lire $5p_1 x^4$, par symétrie avec le terme $5p_4 x$, et qu'ainsi

$$p_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Dans l'impossibilité de le savoir avec certitude, je m'arrêterai à cette hypothèse.

Les coefficients p_2, p_3, p_4, p_5 seront alors définis par les relations

$$\begin{aligned} 8p_2 &= 7p_1^2 + ab, \\ 7p_3 &= 5p_1 p_2 + 2abp_1, \\ 2p_4 &= p_1 p_3 + abp_2, \\ 5p_5 &= p_1 p_4 + 4abp_3. \end{aligned}$$

On en déduit

$$p_2 = \frac{7p_1^2 + ab}{8},$$

$$p_3 = \frac{p_1}{8} (5p_1^2 + 3ab),$$

$$p_4 = \frac{5p_1^4 + 10abp_1^2 + a^2b^2}{16},$$

$$p_5 = \frac{p_1}{16} (p_1^4 + 10abp_1^2 + 5a^2b^2).$$

Ces formules et la lecture de l'énoncé suggèrent les substitutions

$$a = -2a_1, \quad b = -2b_1;$$

mais, comme l'observe M. Laisant, il sera préférable de poser

$$\frac{a+b}{2} = p, \quad \frac{a-b}{2} = q,$$

ce qui donnera

$$p_2 = p^2 - \frac{q^2}{8},$$

$$p_3 = p^3 - \frac{3pq^2}{8},$$

$$p_4 = p^4 - \frac{3}{4}p^2q^2 + \frac{q^4}{16},$$

$$p_5 = p^5 - \frac{5}{4}p^3q^2 + \frac{5}{16}pq^4.$$

L'équation à traiter deviendra, dès lors,

$$x^5 + 5px^4 + 10\left(p^2 - \frac{q^2}{8}\right)x^3 + \dots = 0.$$

Elle se simplifiera un peu par la substitution

$$x + p = z;$$

mais nous laisserons au lecteur le soin de poursuivre cette investigation et de vérifier si l'équation dérivée donnera les facilités désirées pour achever la séparation des racines.

