

AURIC

Note sur l'eulérienne

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 321-326

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__321_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K'2d]

NOTE SUR L'EULÉRIENNE ;

PAR M. AURIC.

Si, dans un triangle $A_1 A_2 A_3$, pris comme triangle de référence, on mène les céviennes de deux points P, Q dont les coordonnées barycentriques sont $\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_3}$ et $\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \frac{1}{q_3}$, les pieds des céviennes sont sur une conique E dont l'équation est

$$\Sigma p_1 q_1 x_1^2 - (p_2 q_3 + p_3 q_2) x_2 x_3 = 0$$

et que nous appellerons *eulérienne* ⁽¹⁾ parce que si P est le barycentre G , et Q l'orthocentre H , la conique obtenue est le cercle des neuf points.

Si nous posons

$$\Sigma \frac{p_1}{q_1} = \rho, \quad \Sigma \frac{q_1}{p_1} = \sigma,$$

les autres points d'intersection des céviennes $A_1 P, A_1 Q$ avec E sont

$$\frac{p_1 x_1}{1 + \frac{p_1}{q_1} \sigma} = p_2 x_2 = p_3 x_3, \quad \frac{q_1 x_1}{1 + \frac{q_1}{p_1} \rho} = q_2 x_2 = q_3 x_3.$$

La droite PQ est tangente à E si $\rho\sigma = 1$ ou $\rho\sigma = 9$; P et Q sont conjugués par rapport à E si $\rho\sigma = 3$.

L'équation de l'eulérienne s'écrit

$$\Sigma x_1 \Sigma p_1 q_1 x_1 = \Sigma (p_2 + p_3)(q_2 + q_3) x_2 x_3,$$

(1) Lorsque P et Q sont confondus, l'eulérienne devient une conique inscrite.

ce qui montre que E est homothétique à la conique circonscrite que représente le second membre.

En particulier, si P est en G,

$$p_1 = p_2 = p_3,$$

Q en H,

$$\begin{aligned} q_1 &= \cot A_1, & q_2 &= \cot A_2, & q_3 &= \cot A_3, \\ \sum (\cot A_2 + \cot A_3) x_2 x_3 &= \sum \frac{\sin A_1}{\sin A_2 \sin A_3} x_2 x_3 \\ &= \frac{1}{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3} \sum \sin^2 A_1 x_2 x_3, \end{aligned}$$

qui est l'équation du cercle circonscrit comme on devait s'y attendre puisque, dans ce cas, l'euclérienne est un cercle.

L'équation de E s'écrit également

$$\Sigma p_1 x_1 \Sigma q_1 x_1 = 2 \Sigma (p_2 q_3 + p_3 q_2) x_2 x_3,$$

ce qui montre que E, la conique circonscrite

$$\Sigma (p_2 q_3 + p_3 q_2) x_2 x_3 = 0$$

et la conique conjuguée,

$$\Sigma p_1 q_1 x_1^2 = 0$$

appartiennent au même faisceau dont les cordes d'intersection sont $\Sigma p_1 x_1 = 0$ et $\Sigma q_1 x_1 = 0$.

Enfin, E peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} &\Sigma [(p_1 + q_1)^2 - (p_1 - q_1)^2] x_1^2 \\ &- 2[(p_2 + q_2)(p_3 + q_3) - (p_2 - q_2)(p_3 - q_3)] x_2 x_3 = 0. \end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit que E appartient au faisceau de deux coniques inscrites dans $A_1 A_2 A_3$, les céviennes des points de contact concourant en

$$(R) \quad \frac{1}{p_1 + q_1}, \quad \frac{1}{p_2 + q_2}, \quad \frac{1}{p_3 + q_3}$$

et

$$(S) \quad \frac{1}{p_1 - q_1}, \quad \frac{1}{p_2 - q_2}, \quad \frac{1}{p_3 - q_3}.$$

On a donc la proposition suivante :

Soient quatre points P, Q, R, S dont les inverses forment une division harmonique : si l'on construit les coniques inscrites dont les points de contact sont les pieds des céviennes des points R et S, les points d'intersection de ces deux coniques sont sur l'eulérienne des points P et Q, et réciproquement.

Si l'on pose

$$p_2 q_3 - p_3 q_2 = \lambda_1, \quad p_2 q_3 + p_3 q_2 = \mu_1,$$

l'équation tangentielle de l'eulérienne est

$$\Sigma \lambda_1^2 u_1^2 - 2(\lambda_2 \lambda_3 + 2 \mu_2 \mu_3) u_2 u_3 = 0.$$

Les coordonnées du centre de E sont

$$\begin{aligned} & \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1) + 2 \mu_1(\mu_2 + \mu_3), \\ & \lambda_2(\lambda_3 + \lambda_1 - \lambda_2) + 2 \mu_2(\mu_3 + \mu_1), \quad \dots \end{aligned}$$

On voit aisément que l'équation de E peut se mettre sous la forme d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & p_1 x_1 \\ 1 & 0 & 1 & p_2 x_2 \\ 1 & 1 & 0 & p_3 x_3 \\ q_1 x_1 & q_2 x_2 & q_3 x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous considérons la conique circonscrite

$$\Sigma n_1 x_1 x_2 = 0$$

et si nous appelons t_1, t_2, t_3 le pôle par rapport à cette conique de la droite

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

on voit aisément que, si l'on a la relation

$$\lambda_1 t_1 u_1 + \lambda_2 t_2 u_2 + \lambda_3 t_3 u_3 = 0,$$

le lieu du point représentatif U est une eulérienne si

N est fixe, de même que le lieu de N est une eulérienne si U est fixe.

L'équation de cette eulérienne est

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & n_1 u_1 \\ 1 & 0 & 1 & n_2 u_2 \\ 1 & 1 & 0 & n_3 u_3 \\ \lambda_1 n_1 u_1 & \lambda_2 n_2 u_2 & \lambda_3 n_3 u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on a la relation

$$\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 + \mu_3 n_3 = 0,$$

le lieu de T, si U est fixe, est l'eulérienne

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & u_1 t_1 \\ 1 & 0 & 1 & u_2 t_2 \\ 1 & 1 & 0 & u_3 t_3 \\ \mu_1 t_1 & \mu_2 t_2 & \mu_3 t_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En particulier, si $u_1 = u_2 = u_3$, le lieu du pôle de Δ_∞ , c'est-à-dire du centre, est une eulérienne.

Considérons la conique inscrite

$$\Sigma m_1^2 x_1^2 - 2 m_2 m_3 x_2 x_3 = 0.$$

Si l'on a comme ci-dessus

$$\lambda_1 t_1 u_1 + \lambda_2 t_2 u_2 + \lambda_3 t_3 u_3 = 0,$$

le lieu du point représentatif T est une eulérienne si M est fixe, de même que le lieu de M est une eulérienne si T est fixe.

L'équation de cette eulérienne est

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & m_1 t_1 \\ 2 & 0 & 2 & m_2 t_2 \\ 2 & 2 & 0 & m_3 t_3 \\ \lambda_1 m_1 t_1 & \lambda_2 m_2 t_2 & \lambda_3 m_3 t_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on a la relation

$$\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \mu_3 m_3 = 0,$$

le lieu de U, si T est fixe, est l'eulérienne

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & t_1 u_1 \\ 1 & 0 & 1 & t_2 u_2 \\ 1 & 1 & 0 & t_3 u_3 \\ \mu_1 u_1 & \mu_2 u_2 & \mu_3 u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Enfin, on démontre la proposition suivante :

Pour que la conique inscrite ci-dessus

$$\Sigma m_i^2 x_i^2 - 2 m_2 m_3 x_2 x_3 = 0$$

soit conjuguée par rapport aux points B, C, il faut que le point représentatif M se trouve sur l'eulérienne des points $\frac{1}{B}$ et $\frac{1}{C}$.

Nous appellerons *eulérienne généralisée* la conique dont l'équation est

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_3 & b_2 & p_1 x_1 \\ b_3 & a_2 & b_1 & p_2 x_2 \\ b_2 & b_1 & a_3 & p_3 x_3 \\ q_1 x_1 & q_2 x_2 & q_3 x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En appelant α_i, β_i les mineurs du discriminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

on trouve que cette équation développée est

$$\Sigma \alpha_i p_i q_i x_i^2 + \beta_1 (p_2 q_3 + p_3 q_2) x_2 x_3 = 0.$$

Si l'on considère la conique

$$\Sigma k_i n_i^2 x_i^2 + 2 n_2 n_3 x_2 x_3 = 0$$

et si l'on appelle, comme précédemment, $t_1 t_2 t_3$ le pôle de la droite

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

avec la condition

$$\lambda_1 t_1 u_1 + \lambda_2 t_2 u_2 + \lambda_3 t_3 u_3 = 0,$$

on obtiendra les deux eulériennes suivantes en éliminant successivement t_i et u_i ,

$$\begin{vmatrix} k_1 & 1 & 1 & \frac{u_1}{n_1} \\ 1 & k_2 & 1 & \frac{u_2}{n_2} \\ 1 & 1 & k_3 & \frac{u_3}{n_3} \\ \lambda_1 \frac{u_1}{n_1} & \lambda_2 \frac{u_2}{n_2} & \lambda_3 \frac{u_3}{n_3} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} k_2 k_3 - 1 & 1 - k_3 & 1 - k_2 & n_1 t_1 \\ 1 - k_3 & k_3 k_1 - 1 & 1 - k_1 & n_2 t_2 \\ 1 - k_2 & 1 - k_1 & k_1 k_2 - 1 & n_3 t_3 \\ \lambda_1 n_1 t_1 & \lambda_2 n_2 t_2 & \lambda_3 n_3 t_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce sont deux eulériennes corrélatives.

On peut transformer, en effet, la définition de l'eulérienne et dire : Si deux droites coupent les côtés du triangle de référence en $P_1 P_2 P_3$, $Q_1 Q_2 Q_3$, les six céviennes $A_i P_i$, $A_i Q_i$ sont tangentes à une conique qui est la corrélatrice de l'eulérienne.

Enfin, on démontrerait facilement que, si dans l'eulérienne

$$\Sigma p_1 q_1 x_1^2 - (p_2 q_3 + p_3 q_2) x_2 x_3 = 0,$$

on fait

$$q_i = p_i \cot A_i,$$

l'eulérienne obtenue est tangente à quatre coniques inscrites, ce qui est une généralisation du théorème de Feuerbach.
