

J. LEMAIRE

Théorèmes sur les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 289-319

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__289_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L' 16]

THÉORÈMES SUR LES CONIQUES;

PAR M. J. LEMAIRE.

1. Soient (H) une hyperbole équilatère, (S) un cercle, Ω et O leurs centres, A, B, C, D leurs points communs, K et D' les points diamétralement opposés à D sur ces courbes (*fig. 1*) : les sécantes communes BC et AD ayant des directions symétriques par rapport aux axes de (H), BC et AD' ont des directions symé-

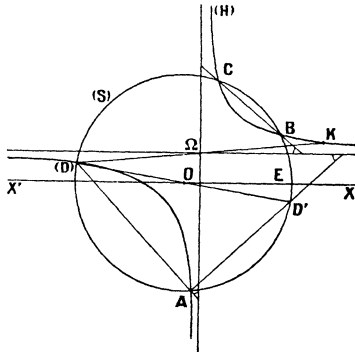


Fig. 1.

triques par rapport aux asymptotes; comme cette propriété subsiste si l'on projette orthogonalement la figure sur un plan parallèle à une asymptote de (H), on peut dire que :

Si une hyperbole équilatère (h) a ses asymptotes parallèles aux axes d'une ellipse (s), trois de leurs

points communs a, b, c , et le symétrique d' du quatrième par rapport au centre o de (s) , sont sur un cercle.

En vertu du principe de continuité de Poncelet, nous considérerons ce théorème comme vrai pour toute conique (s) , même quand elle n'est pas coupée par (h) en quatre points réels; la même remarque s'applique aux propositions qui vont suivre. Dans le cas de la parabole, le théorème précédent prend cette forme :

Si une hyperbole équilatère a un diamètre d' d'une parabole pour asymptote, le point de la parabole symétrique de celui qui appartient à ce diamètre et les points d'intersection à distance finie de ces deux courbes sont sur un cercle.

Lorsque, (s) étant une conique à centre, (h) contient ce centre, le premier théorème ci-dessus devient le théorème de Joachimsthal sur les normales issues d'un point à une conique à centre; si (s) est une parabole dont l'axe est une asymptote de (h) , le second donne le théorème de Joachimsthal relatif à la parabole.

Les réciproques de ces deux théorèmes sont immédiates :

Trois des points communs à un cercle et à une conique à centre (s) et le symétrique du quatrième par rapport à ce centre sont sur une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes de (s) ;

Trois des points communs à un cercle et à une parabole sont sur une hyperbole équilatère dont une asymptote est le diamètre de la parabole qui passe par le symétrique du quatrième point commun par rapport à l'axe.

On sait que si une sécante commune à une hyperbole équilatère et à un cercle est un diamètre pour l'une des courbes, la sécante conjuguée est un diamètre pour l'autre; projetant sur un plan parallèle à une asymptote et appliquant ce qui précède, nous voyons que :

Si une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes d'une conique la coupe en deux points b et d diamétralement opposés sur cette conique, les deux autres points communs a et c sont diamétralement opposés sur l'hyperbole, et les cercles acb , acd touchent en b et d la conique.

2. Soit E un point du cercle O situé sur la droite $X'OX$ parallèle à une asymptote de (H) (*fig. 1*), M un point quelconque du cercle, M_1 le point tel que M soit le milieu de l'arc EM_1 : la corde EM_1 et la tangente en M se projettent sur un plan parallèle à $X'X$ suivant des droites parallèles; em_1 , projection de EM_1 , est donc perpendiculaire à la normale en m à la conique (*s*).

Si A_1, B_1, C_1, D_1 sont les points qui correspondent à A, B, C, D comme M_1 à M , il est aisé de voir que, BC et AD étant symétriques en direction par rapport aux axes de (H) (*fig. 1*), B_1C_1 et A_1D_1 le sont par rapport aux asymptotes, propriété qui se conserve en projection orthogonale sur un plan parallèle à $X'X$, de sorte que a_1, b_1, c_1, d_1 sont sur un cercle. Cela est vrai aussi si l'on remplace E par une extrémité du diamètre du cercle O perpendiculaire à $X'X$; on a ainsi ce théorème, qui généralise un théorème dû à Joachimsthal :

Si quatre points d'une conique à centre sont sur

une hyperbole équilatère d'asymptotes parallèles aux axes, les points où elle est coupée par les perpendiculaires menées d'un sommet aux normales en ces points à la conique sont sur un cercle.

3. Le point K (*fig. 1*) étant l'orthocentre de ABC , le centre de gravité de ce triangle est le point G de OK situé au tiers de ce segment à partir de O ; donc :

*Si a, b, c, d désignent les points communs à une conique à centre (s) et à une hyperbole équilatère (h) d'asymptotes parallèles aux axes de (s), le centre de gravité g de abc est au tiers de ok à partir du centre (o) de (s), k étant le point diamétralement opposé à d sur (h) (*fig. 2*).*

Par conséquent, les centres de gravité des quatre triangles ayant pour sommets trois des points a, b, c, d sont sur une hyperbole homothétique de (h) dans le rapport $\frac{1}{3}$, le centre d'homothétie étant le centre de (s).

Dans le cas de la parabole, le théorème précédent prend cette forme :

Si une hyperbole équilatère a un diamètre d'une parabole pour asymptote, le centre de gravité du triangle des trois points communs à distance finie a pour ordonnée le tiers de celle du diamètre.

4. Désignons par f le quatrième point commun à (h) et au cercle $abcd'$ (*fig. 2*), les droites bc et fa sont également inclinées sur les axes de (h), et par suite sur les bissectrices de l'angle $\widehat{yox}$ des axes de (s); il en résulte que $\widehat{oia} = \widehat{olb}$, i et l étant les points où fa et bc coupent respectivement ox et oy ; mais a ,

b, c, d' étant sur un cercle, on a aussi $\widehat{olb} = \widehat{ona}$, n étant le point commun à ad' et oy ; par conséquent, $\widehat{oia} = \widehat{ona}$, le quadrilatère $oian$ est inscriptible dans un cercle, $\widehat{fad'}$ est droit, et l'on a ce théorème :

Le cercle $abcd'$ coupe (h) en un quatrième point f diamétralement opposé à d' sur ce cercle.

Le centre δ du cercle est le milieu de fd' ; si h désigne l'orthocentre du triangle abc , et ω le centre

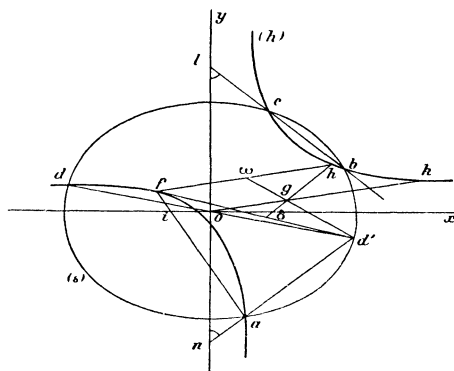


Fig. 2.

de (h) , le centre de gravité g de abc est au tiers de δh à partir de δ , fh a son milieu en ω , $d'\omega$ passe en g : les deux triangles abc et fhd' ont le même centre de gravité g .

Nous avons déjà vu que, k étant diamétralement opposé à d sur (h) , ok passe en g , et $og = \frac{ok}{3}$; les triangles $o\omega\delta$ et $kd'h$ sont inversement homothétiques dans le rapport $\frac{1}{3}$, le centre d'homothétie étant g , et nous avons ce théorème :

Les centres de gravité des quatre triangles formés par les points communs à (s) et à une hyperbole équilatère (h) d'asymptotes parallèles aux axes de (s) sont sur la conique (s') homothétique de (s) par rapport au centre ω de (h) , le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{1}{3}$.

5. Si (h) passe en o , on sait que les normales à (s) en a, b, c, d concourent en un point p de (h) ; le premier des deux théorèmes ci-dessus montre que le cercle de Joachimsthal relatif au point d , c'est-à-dire le cercle $abcd'$, coupe l'hyperbole d'Apothlonius (h) au point f diamétralement opposé à d' sur ce cercle; nous verrons plus loin que of est alors parallèle à la normale en d à la conique (s) .

Nous avons vu que les centres de gravité des quatre triangles formés par les points a, b, c, d , pris trois à trois, sont d'une part sur une hyperbole équilatère (h') , homothétique de (h) dans le rapport $\frac{1}{3}$, le centre d'homothétie étant le centre o de (s) , et d'autre part sur une conique (s') homothétique de (s) , dans le même rapport $\frac{1}{3}$, le centre d'homothétie étant le centre ω de (h) ; (h') passe donc au centre o' de (s') , et les normales à (s') aux points communs à cette conique et à (h') concourent en un point qui est l'homologue, dans l'homothétie par rapport à ω , du point commun aux normales à (s) aux points a', b', c', d' , diamétralement opposés à a, b, c, d , de sorte qu'on peut énoncer ce théorème :

Les centres de gravité des triangles formés par les pieds des normales issues d'un point p à une conique (s) , associés trois à trois, sont sur la

conique (s') homothétique de (s) par rapport au centre ω de l'hyperbole d'Apollonius (h) relative à p , dans le rapport $\frac{1}{3}$; les normales à (s') en ces centres de gravité concourent au point situé au tiers de $\omega p'$, p' étant symétrique de p par rapport au centre o de (s) .

6. *Formules de Desboves.* — Le quadrilatère normal circonscrit formé par les tangentes à (s) aux pieds des normales issues de p est déterminé dès que l'on connaît un de ses sommets; appelons m et n deux sommets opposés, pôles de bc et ad par rapport à (s) , x_0, y_0 et x_1, y_1 leurs coordonnées rapportées aux axes de (s) , que nous pourrions supposer être une ellipse de demi-axes a et b . Les directions ad et ad' étant conjuguées relativement à cette conique, les directions om et on sont telles que la symétrique de l'une par rapport aux axes, et l'autre, sont conjuguées; si donc m se déplace sur om supposée fixe, on reste aussi fixe; m et n décrivent dans ces conditions, sur ces deux droites, des divisions homographiques; il en est de même de leurs projections sur ox , de sorte que x_0 et x_1 sont liées par une relation linéaire: en considérant les cas où m vient en o , puis à l'infini sur la droite, puis sur la tangente à (s) en un sommet de l'axe focal, on trouve que cette relation se réduit à $x_0 x_1 = -a^2$; on aurait de même $y_0 y_1 = -b^2$: ce sont les formules de Desboves qui seront utilisées plus loin.

Relation entre ω et p . — Ces points se correspondent homographiquement, et leurs coordonnées (ξ, η) et (α, β) ont entre elles des relations de la

forme

$$\xi = \frac{A\alpha + B\beta + C}{A'\alpha + B'\beta + C'}, \quad \eta = \frac{A_1\alpha + B_1\beta + C_1}{A'\alpha + B'\beta + C'},$$

$A, B, \dots, C'$, constantes faciles à obtenir en considérant des positions particulières de p ; on trouve ainsi

$$\xi = \frac{a^2\alpha}{c^2}, \quad \eta = -\frac{b^2\beta}{c^2};$$

par suite, $\frac{\eta}{\xi} \propto \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{b^2}{a^2}$, la droite $o\omega$ et la droite isogonale de op relativement aux axes de la conique (s) sont conjuguées par rapport à cette conique.

On vérifie que ω est sur la droite joignant les projections de p sur les axes, puisque $\frac{\xi}{\alpha} + \frac{\eta}{\beta} = 1$; cette propriété résulte d'ailleurs de ce que ω et p appartiennent à l'hyperbole équilatère (h).

7. Rappelons que deux points m, n et les points b et c, a et d , où leurs polaires coupent une conique (s), appartiennent à une même conique, ou que si, par un point m et les points de contact b et c des tangentes à (s) issues de m , on fait passer une conique arbitraire, la sécante commune à cette conique et à (s), et conjuguée de bc , a son pôle n par rapport à (s) sur cette conique.

Considérons, en particulier, le cercle mbc : mn , polaire par rapport au cercle du point commun à bc et ad , est symédiane du triangle mbc ; par suite, si r est le point où om coupe bc , rm et rn sont symétriques par rapport à bc .

Imaginons que, m restant fixe, (s) se déforme en conservant les mêmes foyers φ et φ' , et considérons la conique infiniment aplatie qui se réduit au segment $\varphi\varphi'$:

mn reste fixe, et, si n' est la position particulière de n correspondante, comme r vient en o , on' est symétrique de om par rapport à $\varphi\varphi'$; mais il en est déjà ainsi de on , donc n et n' coïncident. Ainsi, pour toutes les coniques de foyers φ et φ' , le cercle mbc passe en un second point fixe n ; ce point est sur le cercle $m\varphi\varphi'$ et, si ce cercle coupe om en m' , on a $om' = on$, et par suite

$$om \quad on = om \times om' = o\varphi \times o\varphi' = c^2,$$

$2c$ désignant la distance $\varphi\varphi'$; dans ces mêmes conditions, bc bissectrice de $\widehat{mrn}$ enveloppe la parabole de foyer n et de directrice om ; on peut énoncer les résultats suivants :

Pour que deux points m et n et les points où leurs polaires par rapport à une conique (s) de centre o coupent cette courbe soient sur un cercle, il faut et il suffit que l'angle $\widehat{mon}$ ait pour bissectrice l'axe focal, et que $om \times on$ soit égal au carré c^2 de la demi-distance focale; dans ces conditions, on peut remplacer (s) par toute conique homofocale. L'enveloppe des polaires de m par rapport aux coniques homofocales à (s) est la parabole (m) de foyer n et de directrice om .

Cette parabole, dite *parabole de Chasles*, possède de nombreuses propriétés (F. BALITRAND, *N. A.*, 1913, p. 198); elle est en particulier l'enveloppe des tangentes aux coniques du faisceau tangentiel défini par les foyers de (s) menées par les pieds des normales issues de m à ces coniques.

Le cercle mbc passant au point fixe n , le point diamétralement opposé à m sur ce cercle décrit une droite fixe, d'où cette proposition connue :

Le point commun aux normales en b et c à (s) décrit la perpendiculaire μ en n à mn , quand (s) se déforme en conservant ses foyers.

Cette droite μ contient en particulier les centres de courbure en m aux deux coniques du faisceau qui passent en ce point; à tout point m correspond ainsi, les foyers de (s) étant donnés, une droite μ dont la construction est immédiate, puisque n est sur le cercle $m\varphi\varphi'$ et sur la symétrique de om par rapport à $\varphi\varphi'$; à l'aide de la relation $om \times on = c^2$ et de ce qui précède, on voit aisément qu'à une droite μ correspondent trois points m . Laguerre a donné de curieuses propriétés du triangle de ces points (F. BALITRAND, *N. A.*, 1914, p. 1).

8. Observant que la parabole (m) touche les axes de (s) , nous pouvons énoncer ce théorème de Chasles :

Le quadrilatère normal circonscrit à (s) et relatif à un point p est circonscrit à la parabole (p) tangente aux axes et aux bissectrices de $\widehat{\varphi p \varphi'}$.

La directrice de (p) étant op , les orthocentres des triangles normaux circonscrits relatifs à p sont sur cette droite op ; les cercles circonscrits à ces triangles passent au foyer de (p) , c'est-à-dire au point q tel que $\widehat{poq}$ ait pour bissectrice l'axe focal de (s) et que

$$op \times oq = c^2.$$

La symétrique de om par rapport aux axes (*fig. 3*) et on étant conjuguées, ad , polaire de n , est parallèle à la droite joignant les projections m' et m'' de m sur les axes; la trace u de ad sur l'axe focal ox de (s) a

pour polaire la perpendiculaire à cet axe menée en n ,
et l'on a $\overline{ou} \times x_1 = a^2$, et par suite $\overline{ou} = -x_0$:
 a et $m'm''$ sont symétriques par rapport à o .

Si donc, m restant fixe, (s) se déforme en conservant ses foyers, *ad reste fixe*, et le lieu de n est alors une

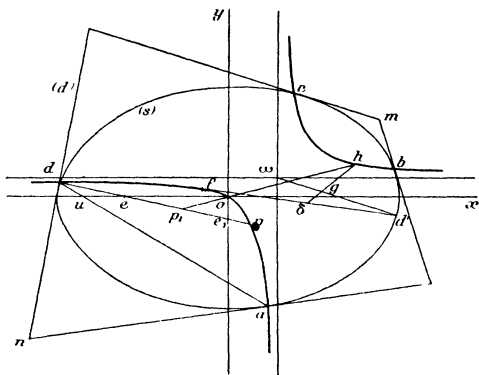


Fig. 3.

droite perpendiculaire à ad et passant par le point conjugué harmonique de u par rapport aux foyers φ et φ' .

9. Nous allons maintenant supposer que, (s) restant fixe, p se déplace sur la normale à (s) en un point d de cette conique.

Le pôle n de ad décrit la tangente (d) en d , la droite joignant les projections de n sur les axes enveloppe une parabole tangente aux axes aux points où (d) les coupe; la droite bc symétrique de la précédente par rapport à o enveloppe une parabole (π) symétrique de la précédente, d'où ce théorème :

Le triangle abc , qui a pour sommets les pieds de

trois des normales issues d'un point p à une conique (s) est circonscrit à une parabole (π) tangente aux axes aux points situés sur la tangente (d') à (s) au point d' diamétralement opposé au pied d de la quatrième normale issue de p .

Le foyer de (π) est la projection r de o sur cette droite (d') , le cercle circonscrit à abc passe en ce point, et nous retrouvons ce théorème de Laguerre :

Le cercle de Joachimsthal relatif à d , c'est à-dire le cercle $abcd'$, contient la projection r de o sur la tangente à (s) en d' .

Nous reportant à un théorème obtenu plus haut (4), nous voyons que or passe en f , diamétralement opposé à d' sur le cercle, de sorte que of est parallèle à la normale en d . L'orthocentre h de abc (fig. 3) et le quatrième point commun f à l'hyperbole équilatère (h) et au cercle abc sont, comme l'on sait, diamétralement opposés sur (h) , et l'on a cette propriété :

La droite oh joignant le centre de (s) à l'orthocentre de abc et la quatrième normale pd issue de p ont des directions symétriques par rapport aux axes de (s) .

La droite oh est la directrice de la parabole (π) , elle est le lieu géométrique de h quand p décrit la normale fixe en d , car alors (π) ne change pas.

10. Dans les mêmes conditions, c'est-à-dire quand (h) se déforme en passant en d et o , p et f décrivent des divisions homographiques sur deux droites parallèles; les points à l'infini de ces droites, qui coïncident, se correspondent, donc pf pivote; en supposant que p

vienne successivement sur les axes, on trouve que son point fixe est à l'infini; par conséquent :

Le point (p) parcourant la normale à (s) en d , le point f , quatrième point commun à l'hyperbole d'Apollonius (h) relative à p et au cercle de Joachimsthal relatif à d , décrit le diamètre de (s) parallèle à la normale fixe, le segment pf conserve une direction et une grandeur constantes.

Le cercle de Joachimsthal passe en deux points fixes d' et r , son centre δ décrit la droite inversement homothétique de la normale fixe relativement à o , dans le rapport $\frac{1}{2}$.

Nous avons vu que, g désignant le centre de gravité de abc , og coupe (h) au point k diamétralement opposé à d , est par suite symétrique de od par rapport aux axes de (s); donc, quand p décrit la normale en d , le lieu de g est la droite symétrique de od par rapport aux axes de la conique (s).

11. Si t est le symétrique de p par rapport à δ , $d't$ est équipollent à pf , et le point t reste fixe; supposons que p vienne en p_1 , point de oh qui est le milieu du segment ee' intercepté sur la normale en d par les axes de (s) (*fig. 3*) : comme h est sur (h), p_1 et h coïncident; k désignant encore le point de (h) diamétralement opposé à d , pk et pd sont également inclinées sur les axes; si donc p vient en p_1 , k vient en o , kd en od , ω au milieu de od ; comme $og = \frac{ok}{3}$, g vient en o ; ainsi h coïncide alors avec p_1 , g avec o ; par suite, δ se confond avec δ_1 milieu du segment op'_1 opposé à op_1 , de sorte que t est le point de oh symé-

trique de p_1 par rapport à δ_1 , et que

$$\overline{ot} = 2\overline{op_1}' = -2\overline{op_1}.$$

Le point p se déplaçant sur la normale en d à (s) , le centre ω de (h) décrit la droite (ω) joignant les projections de d sur les axes de (s) ; fh ayant son milieu sur cette droite (ω) et ses points f et h sur les droites fixes lieux de ces points [lesquelles sont le diamètre or de (s) parallèle à la normale fixe et le diamètre oh symétrique par rapport aux axes], enveloppe une parabole tangente aux trois droites : *La parallèle à la normale en d et passant au centre de (s) , la symétrique de ce diamètre par rapport aux axes, le diamètre fh de (h) , la droite joignant les projections de d sur les axes de (s) , les parallèles aux axes menées par d sont six tangentes d'une parabole.*

Par suite le cercle ofh , quand p parcourt la normale en d , a un second point fixe puisqu'alors la parabole ne change pas; il en résulte que son quatrième point commun avec (h) décrit une droite, parallèle à la droite lieu du centre de ce cercle.

Lieu de t . — Appelons ov la distance de o à (d) , tangente en d à (s) , ow le demi-diamètre perpendiculaire à op_1 , p_1 étant le milieu de ce' ; ow est parallèle à la tangente symétrique de (d) par rapport à un axe de (s) , et est par suite conjuguée du diamètre symétrique de od ; on a donc, d'après un théorème d'Apollonius, et en employant les notations habituelles :

$$ov \cdot ow = a \cdot b;$$

d'autre part,

$$ov \cdot de = b^2,$$

d'où

$$(1) \quad \frac{de}{ow} = \frac{b}{a};$$

on a aussi

$$\frac{de}{de'} = \frac{b^2}{a^2},$$

et

$$(2) \quad \frac{op_1}{de} = \frac{ee'}{2de} = \frac{c^2}{2b^2}.$$

Multipliant membre à membre (1) et (2), nous obtenons

$$\frac{op_1}{ow} = \frac{c^2}{2ab},$$

d'où il suit que le lieu de p_1 , quand d décrit (s) , est une ellipse (p_1) homothétique de (s) après une rotation de 90° autour du centre; son axe focal, perpendiculaire à celui de (s) , a pour valeur $2a \times \frac{c^2}{2ab}$, ou $\frac{c^2}{b}$, l'autre $\frac{c^2}{a}$.

Si l'on projette la figure sur un plan passant par $x'x$ et faisant avec le plan de la figure un angle ayant $\frac{b}{a}$ pour cosinus, l'ellipse (p_1) devient un cercle, $de e'$ devient une droite telle que le milieu du segment intercepté sur elle par les axes soit sur le cercle; l'enveloppe de cette droite est une hypocycloïde à quatre rebroussements quadritangente au cercle et projection de la développée de (s) ; l'ellipse (p_1) est donc quadritangente à cette développée.

Comme $\overline{ot} = -2\overline{op_1}$, le lieu de t , quand d décrit (s) , est l'ellipse (t) qui a ses sommets aux rebroussements de la développée. Rappelant que Laguerre a nommé *centre d'une droite* le point dont les projections sur les axes ox et oy sont symétriques, par rapport à o , des traces de la droite sur ces axes, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Le point t symétrique de p par rapport au centre δ du cercle de Joachimsthal $abcd'$ est le centre de la normale pd ; ce point, qui est sur oh , est fixe quand p décrit la normale; le lieu de t , quand d décrit l'ellipse (s) , est l'ellipse semblable (t) qui a ses sommets aux rebroussements de la développée de (s) ; les centres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des quatre cercles de Joachimsthal relatifs à p appartiennent à l'ellipse de grandeur constante (t') , homothétique de la précédente par rapport à p , le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{2}$.

12. Le point p' étant le milieu de op , $\delta p'$ est parallèle à oth (fig. 4), le segment $p''\delta'$ intercepté sur cette droite par les axes a son milieu sur le diamètre or de (s)

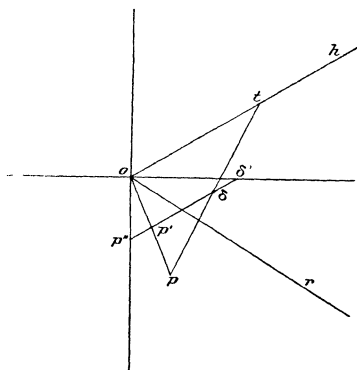


Fig. 4.

parallèle à la normale dp ; d'ailleurs, en projetant parallèlement à or , on voit (10) que $p'\delta$ a aussi son milieu sur or , et $\overline{\delta\delta'} = \overline{p''p'}$, de sorte que δ est sur l'hyperbole équilatère passant en p' et d'asympt-

totes ox et oy ; t est sur l'hyperbole homothétique de la précédente relativement à p , dans le rapport 2, laquelle contient le point o ; on peut énoncer cette proposition :

Les normales à l'ellipse (t) aux centres des quatre normales issues d'un point p concourent; il en est de même des normales à (t') aux centres des quatre cercles de Joachimsthal.

A l'aide de la relation entre ω et p (6), on trouve sans peine que le point de concours des normales à (t) appartient à la droite ow qui joint le centre de (s) et le centre de l'hyperbole d'Apollonius (h) relative à p .

13. Soit $o\theta$ le vecteur équipollent aux vecteurs pf et $d't$; cherchons le lieu de θ quand d décrit (s) , ce point θ restant fixe lorsque p se déplace sur la normale en d ; si la normale en d' coupe en t' l'axe focal de (s) et en t'' l'autre axe, t' et t'' sont les projections de t sur ces axes, et cette normale passe en θ ; $d\theta$ et $t't''$ ont le même milieu. Projetons la figure de manière que l'ellipse (t) devienne un cercle, $t't''$ devient constant, et comme $\frac{d't'}{d't''}$ a une valeur invariable, la projection de $d't'$ est constante; il en est de même pour celle du segment égal $t''\theta$, et dans la figure projetée le lieu de θ est une ellipse obtenue en faisant tourner la projection de (s) de 90° autour de son centre o ; si nous revenons à la figure primitive, puisque pf est équipollent à $o\theta$, nous avons ce théorème :

Les quatre points tels que f qui correspondent à un point p sont sur une conique (φ) de grandeur

constante, de centre p , de demi-axes $\frac{b^2}{a}$ et $\frac{a^2}{b}$ parallèles à ox et oy .

Comme (h) passe en f et en p , les normales à (φ) aux points tels que f concourent. Observons aussi que les quatre orthocentres, tels que h , relatifs à p sont sur la conique symétrique de (φ) par rapport au centre ω de (h) , et que les normales correspondantes concourent.

14. Supposons qu'une tangente roule sur la parabole (π) rencontrée plus haut (9); elle coupe (s) en deux points tels que b et c , et les normales en ces points concourent sur la normale en d ; en considérant une tangente commune à (π) et à (s) , le point p correspondant est sur la développée de (s) , c'est un point commun à cette courbe et à la normale en d ; donc : *la normale à (s) en d coupe la développée en quatre points (dont deux seulement sont réels) qui sont sur les normales à (s) aux points de contact de cette conique avec les tangentes communes à (s) et à (π) .*

Il suit de là que la développée est du sixième ordre.

Nous avons vu que les tangentes communes à (s) et à une parabole tangente aux axes de cette conique touchent (s) en quatre points qui sont les pieds des normales issues d'un point p , ce point et le foyer q de la parabole étant tels que $\widehat{poq}$ a pour bissectrice l'axe focal de (s) , et que $op \times oq = c^2$; appliquant cette propriété à la parabole (π) , nous avons ce théorème dû à M. Laisant :

La normale à (s) en un point d coupe la développée de (s) en quatre points pour lesquels les tangentes concourent.

Le triangle ABC formé par les tangentes en a, b, c à (s) , triangle normal circonscrit, est inscrit à une hyperbole équilatère (H) passant en o , ayant son centre en d' , et ses asymptotes parallèles à ox et oy .

Réciproquement, il existe une infinité de pareils triangles circonscrits à (s) et inscrits à l'hyperbole, et le lieu du point de concours p des normales à (s) correspondantes est la normale à cette conique au point d diamétralement opposé à d' .

Le triangle pédal de p par rapport à ABC étant abc , qui est inscrit dans le cercle de Joachimsthal $abcd'$, et t étant symétrique de p par rapport au centre δ de ce cercle, les points p et t sont inverses par rapport au triangle normal circonscrit ABC.

Les quatre points a, b, c, d' étant sur un cercle, bc et ad' sont symétriques en direction par rapport aux axes de (s) , directions asymptotiques de (H) , $d'a$ et bc ont des directions conjuguées par rapport à cette hyperbole : le triangle abc est conjugué par rapport à l'hyperbole ; par suite, ABC est conjugué par rapport à la parabole (π) , et le centre du cercle circonscrit à ce triangle est sur ot , directrice de cette parabole. De tout ce qui précède, il résulte que :

Pour que les normales en trois points d'une conique (s) concourent, il faut et il suffit que le cercle circonscrit au triangle de ces trois points passe par la projection du centre de (s) sur la tangente ayant pour point de contact le quatrième point commun.

Cette condition devient, pour la parabole, que le cercle passe au sommet, ou, à cause d'un théorème

vu (3), que le centre de gravité du triangle soit sur l'axe de la parabole.

16. Faisons une transformation homographique de la figure formée par la conique (s) et l'hyperbole équilatère (h) passant au centre de (s) de manière que deux des points communs à ces courbes, b et c , deviennent les points cycliques; soient o_1, x_1, y_1 les transformés des points $o, x(\infty), y(\infty)$: la nouvelle figure se compose de deux cercles (s_1) et (h_1) dont le second est harmoniquement circonscrit à l'autre, o_1, x_1, y_1 étant conjugué à (s_1) et inscrit à (h_1), et qui se rencontrent en a_1 et d_1 ; m_1 étant le centre de (s_1), joignons $m_1 a_1$ qui coupe (h_1) en a_2 ; nous avons

$$m_1 a_1 \times m_1 a_2 = \overline{m_1 a_1}^2,$$

d'où

$$m_1 a_2 = 2 m_1 a_1.$$

Comme m_1 est l'orthocentre de $o_1 x_1 y_1$, a_1 est sur le cercle des neuf points de ce triangle, et par suite le foyer d'une parabole (σ_1) conjuguée à $o_1 x_1 y_1$.

Si nous revenons à la figure primitive, nous voyons que *abc est circonscrit à une conique σ ayant les mêmes axes que (s).*

Nous établirions d'une manière analogue que, réciproquement, *si deux coniques (s) et (σ) sont co-axiales, et s'il existe des triangles inscrits à (s) et circonscrits à (σ), tout pareil triangle abc est inscrit à une hyperbole (h), et les normales à (s) aux sommets de ce triangle concourent.*

En nous reportant au numéro précédent, nous pouvons dire que, de même que le centre d' de (H) est sur (s), le centre ω de (h) est sur (σ); ω et p , point

de concours des normales, se correspondant homographiquement, le lieu de p est une conique, quand abc se déforme, (s) et (σ) restant fixes.

Il résulte encore de ce qui précède (15) que les normales à (σ) aux points où cette conique touche les côtés de abc concourent; et, de même que le cercle abc passe au centre d' de (H) , le cercle des points de contact de (σ) avec les côtés de abc contient le centre ω de (h) . Ces diverses propriétés sont dues à M. Duporcq.

17. En particulier, si (σ) est une ellipse de demi-axes α et β , et (s) le cercle de Chasles (γ) de rayon $(\alpha + \beta)$, on montre aisément qu'il existe des triangles inscrits à (γ) et circonscrits à (σ) ; soient abc un tel triangle, $a'b'c'$ le triangle des points de contact de (σ) avec ses côtés, les normales à (σ) aux sommets de ce triangle concourent sur le cercle de Chasles (γ') de rayon $(\alpha - \beta)$, qui contient aussi l'orthocentre de abc . Il y a d'ailleurs réciprocité entre les deux cercles de Chasles, mais les triangles circonscrits à (σ) et inscrits dans (γ') ne sont réels que si $\alpha > 2\beta$; ces propriétés ont été utilisées dans l'étude des ellipses tritangentes à l'hypocycloïde à trois rebroussements (*N. A.*, 1913).

18. *Triangles normaux circonscrits correspondant à un point de (s) .* — Revenons à la figure 3 : si p coïncide avec d , le centre δ du cercle $abcd'$ vient au milieu de dt ; comme les points d et t se correspondent homographiquement sur (s) et (t) (11), le centre δ du cercle de Joachimsthal décrit une conique, quand p décrit la conique (s) .

Conservant les notations employées plus haut, appe-

lons l' le point où $d't$ coupe oy , f' la position que vient occuper f quand p vient en d (*fig.* 5); ce point f' est sur le diamètre parallèle à la normale à (s) en d , lequel coupe en r la tangente en d' ; df' et $d't$ sont équipollents, et si $d't$ coupe or en f'' , ce point f'' est symétrique de t relativement à d' ; la puissance de o par rapport au cercle de Joachimsthal $abcd'$ a ici pour valeur absolue

$$or \times of' \quad \text{ou} \quad or \times of'';$$

comme

$$or \times d't' = b^2$$

et

$$\frac{of'}{d't'} = \frac{ol}{t't} = \frac{t't + t'l}{t't} = 1 + \frac{t'l}{t't} = 1 + \frac{d't''}{d't'} = 1 + \frac{a^2}{b^2},$$

on a

$$or \times of'' = a^2 + b^2;$$

donc le point o a même puissance $-(a^2 + b^2)$ par rapport au cercle $abcd'$ quand d parcourt la conique (s) ; ce cercle a donc pour enveloppe une anallagmatique du quatrième ordre. Dans les mêmes conditions, comme p et le centre ω de (h) se correspondent homographiquement, ω décrit une conique; il en est de même pour f' , pour l'orthocentre h et pour le centre de gravité g de abc ; le point f' en particulier a pour lieu une ellipse homothétique de l'ellipse (t) (II) qui a ses sommets aux points de rebroussement de la développée de (s) .

Le point p coïncidant encore avec d , soit ABC le triangle normal circonscrit correspondant à abc ; menons par o la parallèle à la normale ad qui coupe en A_1 et A_2 les tangentes en a et d , o est le milieu de A_1A_2 , A_1 est donc sur la tangente (d') à (s) au point diamétralement opposé à d ; on en conclut que les pro-

jections de o sur les côtés de ABC sont en ligne droite, et que le triangle ABC est circonscrit à une parabole ayant o pour foyer et (d') pour tangente au sommet; le cercle ABC passe en o (F. BALITRAND, *N. A.*, 1914, p. 4).

Soit α le point où la normale en a coupe l'axe focal de (s) , on sait que $oA_1 \times \alpha\alpha = b^2$; sur oA_1 , portons $\alpha\alpha' = \alpha a$, de sorte que $\alpha\alpha' \times oA_1 = b^2$; les trois points analogues à A_1 étant sur la tangente (d') à (s) , les trois points analogues à α' sont sur un cercle passant en o et tangent à la parallèle à (d') menée en ce point; considérant les vecteurs d'origine d et équipollents aux vecteurs tels que $\alpha\alpha'$, nous voyons que :

Si sur chacune des normales issues du point d de (s) et autres que celle qui a son pied en d , on porte, à partir de d , une longueur égale au segment compris entre l'axe focal et le pied de la normale, les trois points ainsi obtenus sont sur un cercle tangent en d à (s) (Laguerre).

Le segment de la normale en d compris entre ce point et l'axe focal est le diamètre de ce cercle.

19. *Triangles d'aire maxima inscrits dans une ellipse.* — p décrivant la normale en d à l'ellipse (s) , supposons que ce point vienne en p_1 milieu du segment intercepté par les axes sur la normale; k désignant comme plus haut le point diamétralement opposé à d sur (h) , pk et pd sont également inclinées sur les axes; si donc p vient en p_1 , k vient en o , kd en od , le centre ω de (h) est le milieu de od , et réciproquement; comme $og = \frac{ok}{3}$, le centre de gravité de abc est en o , et le triangle abc est un triangle d'aire maxima

inscrit dans (s) ; le lieu de p_1 est l'ellipse (p_1) déjà rencontrée (11); donc :

Les normales aux sommets d'un triangle maximum inscrit dans une ellipse concourent et le lieu du point de concours est l'ellipse (p_1) quadritangente à la développée. Tout triangle maximum est circonscrit à une parabole tangente aux axes dont le lieu du foyer est la podaire de l'ellipse par rapport au centre.

Les tangentes à (s) en a, b, c étant parallèles à bc, ca, ab , l'orthocentre h du triangle coïncide avec p_1 ; cela résulte aussi de ce que h est sur (h) et sur op_1 (9); le centre δ du cercle circonscrit est donc symétrique, par rapport à o , du milieu de op_1 ; son lieu est l'ellipse homothétique de (p_1) relativement au centre, dans le rapport $\frac{1}{2}$.

Cherchons la puissance de o par rapport au cercle abc , soit $oa = a', b'$ le demi-diamètre conjugué, a_1, a_2 et a_3 les points où oa coupe (s) , le cercle et la droite bc :

$$\overline{a_3 b}^2 = a_3 a \times a_3 a_2 = \frac{3a'}{2} \times a_3 a_2,$$

$$\frac{\overline{a_3 b}^2}{a_3 a \times a_3 a_1} = \frac{b'^2}{a'^2},$$

d'où

$$\overline{a_3 b}^2 = \frac{b'^2}{a'^2} \cdot \frac{3a'}{2} \cdot \frac{a'}{2} = \frac{3b'^2}{4}, \quad a_3 b = \frac{b' \sqrt{3}}{2}$$

et

$$a_3 a_2 = \frac{b'^2}{2a'};$$

donc

$$oa \times oa_2 = a' \left(\frac{a'}{2} + \frac{b'^2}{2a'} \right) = \frac{a'^2 + b'^2}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Ainsi cette puissance est *constante* et égale à $-\frac{a^2+b^2}{2}$; le cercle abc enveloppe une anallagmatique du quatrième degré.

Si d' est le quatrième point commun à l'ellipse et au cercle abc , ad' et bc sont des cordes conjointes; il en est de même de ad' et de la tangente en a à (s) , d'où ce théorème dû à Steiner :

Les cercles osculateurs en a, b, c se coupent sur la conique en un point d' , qui est le quatrième point commun à (s) et au cercle abc , et qui est diamétralement opposé au pied de la quatrième normale issue du point de concours des normales en a, b, c , orthocentre du triangle de ces trois points.

Enveloppe de ad' . — Considérons le cercle dont l'ellipse est la projection et soit AD' la corde projetée en ad' , AA_1 la corde parallèle à ox , B le milieu de l'arc qu'elle sous-tend; on a

$$\text{arc } AA_1 = \text{arc } A_1D' \quad \text{ou} \quad 3 \text{ arc } BA = - \text{arc } BD';$$

il en résulte que AD' enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements, quadritangente au cercle sur $x'ox$ et sur le diamètre perpendiculaire : *l'enveloppe de ad' est la projection de cette courbe, c'est une courbe de quatrième classe tangente à l'ellipse aux sommets, et ayant quatre points de rebroussement sur les diagonales du rectangle des axes, à des distances du centre égales à ces diagonales; donc il existe quatre cercles osculateurs à une ellipse tels que les cordes communes à cette courbe et à ces cercles passent en un point donné (Steiner).*

A est le milieu du segment intercepté par les tan-

gentes de rebroussement sur la tangente AD' à l'hypocycloïde, donc en projection a est le milieu du segment déterminé sur ad' par les diagonales du rectangle principal circonscrit à (s) ; le lieu de ces points milieux pour les droites passant par un même point donné est une hyperbole d'axes parallèles à ceux de l'ellipse, coupant par suite cette courbe en quatre points d'un même cercle; donc les quatre cercles osculateurs dont les cordes communes avec l'ellipse passent en un point ont leurs points de contact sur un cercle.

20. *Synormales.* — Appelons *synnormale* à une conique (s) , en un point a de cette courbe, la droite passant par a et symétrique, en direction, par rapport aux axes de (s) , de la normale en ce point a ; soient a_1 et a'_1 les points où la normale et la synnormale en a coupent l'axe focal, p et p' deux points appartenant respectivement à ces droites et tels que $\widehat{pop'}$ ait l'axe focal pour bissectrice, i la projection de a sur cet axe; nous pouvons écrire

$$\frac{op'}{op} = \frac{oa'_1}{oa_1} = \frac{oi + ia_1}{oi - ia_1} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2};$$

on conclut de là que :

Les synnormales correspondant aux quatre normales issues de p concourent en p' .

D'un point on peut mener quatre synnormales à une conique, et les normales correspondantes concourent.

L'enveloppe de la synnormale d'une ellipse est une transformée homographique de la développée, qui a

en j : les triangles semblables mjk et $m\mu n$ donnent

$$\frac{mj}{m\mu} = \frac{mk}{mn},$$

les triangles mko et mnl sont aussi semblables, et

$$\frac{mk}{mn} = \frac{mo}{ml};$$

par conséquent,

$$\frac{mj}{m\mu} = \frac{mo}{ml}$$

et $j\mu$ est perpendiculaire à l'axe focal : on retrouve la construction de Mannheim.

22. m et m' étant deux points de l'ellipse (s) , k et l , k' et l' les points où les normales dont les pieds sont m et m' coupent les axes, des égalités

$$\frac{mk}{ml} = \frac{m'k'}{m'l'} = \frac{b^2}{a^2}$$

il résulte que *la droite mm' et les deux normales touchent une parabole tangente aux axes*; en supposant que m' vienne coïncider avec m , on trouve ce théorème dû à Mannheim : *le centre de courbure μ de (s) en m est le point où la normale en m touche la parabole (p) tangente aux axes, à la normale et à la tangente en m à (s)* ; on en déduit la construction de μ rappelée plus haut.

Si μ' est le centre de courbure en m de l'hyperbole homofocale de (s) et qui passe en ce point, le triangle $m\mu\mu'$ donne

$$m\mu = m\mu' \times \text{tang } \mu' = m\mu' \times \text{tang } \widehat{\mu mn} = m\mu' \times \text{tang } \widehat{omk},$$

d'où

$$\frac{m\mu}{m\mu'} = \frac{\widehat{\sin om\mu}}{\widehat{\sin om\mu'}}.$$

Ainsi les rayons de courbure en m des deux coniques homofocales passant en ce point sont proportionnels aux sinus des angles que font avec om les normales en m aux deux coniques.

La directrice de la parabole (p) étant om , en supposant que le centre de (s) s'éloigne à l'infini, le théorème de Mannheim prend la forme suivante :

Le centre de courbure en un point m d'une parabole est le point de contact de la normale en ce point avec la parabole (p) tangente à la normale et à la tangente en m à la première, et ayant l'axe de celle-ci pour tangente au sommet.

Le foyer de (p) , qui est n dans le cas d'une conique quelconque, devient ici le symétrique de m par rapport au foyer de la parabole donnée; de ces propriétés on déduit sans peine la construction classique du centre de courbure en un point d'une parabole.

23. Nous donnerons, pour terminer, une démonstration de ce théorème :

Le centre de courbure en un point m d'une conique est le pôle de la tangente en ce point par rapport à la conique homofocale qui y passe (SALMON, Sections coniques, 2^e édition, p. 642; F. BALITRAND, N. A., 1913, p. 204).

Conservant les notations employées ci-dessus, prouvons que μ' est le pôle de la normale mkl par rapport

à (s) : menons par m une corde variable de (s) coupant l'axe focal en λ , et par o son diamètre conjugué coupant en λ' la tangente en m ; ces droites déterminent sur l'axe focal et sur la tangente deux divisions homographiques, et l'on a

$$\alpha.o\lambda.i\lambda' + \beta.o\lambda + \gamma.i\lambda' + \delta = 0,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignant des constantes, et i le point où la tangente en m coupe l'axe oy ; en supposant que la corde $m\lambda$ coïncide successivement avec mo , avec la parallèle à l'axe focal, ou avec la tangente, on trouve que cette relation se réduit à

$$o\lambda.i\lambda' = ok'.im \quad \text{ou} \quad \frac{o\lambda}{ok'} = \frac{im}{i\lambda'},$$

k' étant le point commun à la tangente en m et à l'axe focal; cette égalité montre que λ' est le point où la parabole tangente à imk' , $m\lambda$ et aux axes de (s) , touche la tangente en m à (s) , de sorte que *toute parabole tangente aux axes d'une ellipse et à la tangente en m à cette courbe touche cette tangente en un point dont la polaire par rapport à l'ellipse est la deuxième tangente menée de m à la parabole.* Appliquant cette propriété à la parabole (p) (22), nous voyons que la polaire de μ' par rapport à l'ellipse est précisément la normale $mk'l$ en m à cette conique, ce qui démontre le théorème que nous nous proposons d'établir.
