

B. GLOBAL-MIKHAÏLENKO

**Courbure moyenne de l'ellipsoïde et du
cylindre elliptique, exprimée à l'aide
des fonctions de Lamé**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 277-280

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__277_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L²11]

**COURBURE MOYENNE DE L'ELLIPSOÏDE ET DU CYLINDRE
ELLIPTIQUE, EXPRIMÉE A L'AIDE DES FONCTIONS DE
LAMÉ;**

PAR M. B. GLOBAL-MIKHAÏLENKO.

1. En considérant :

L'ellipsoïde

$$(1) \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$$

et prenant pour coordonnées elliptiques les racines positives u et v de l'équation

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = 0,$$

M. Darboux (*Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, p. 379) donne les expressions suivantes pour les rayons principaux de la courbure de l'ellipsoïde :

$$\rho = -\frac{u\sqrt{uv}}{\sqrt{abc}}, \quad \rho' = -\frac{v\sqrt{uv}}{\sqrt{abc}},$$

d'où l'on déduit la courbure moyenne

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = -\sqrt{abc} \frac{u+v}{(uv)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'identité bien connue

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = \frac{\lambda(\lambda-u)(\lambda-v)}{(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)},$$

que nous écrivons, en tenant compte de l'équation (1),

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (a+b+c-x^2-y^2-z^2)\lambda \\ + ab + ac + bc - (b+c)x^2 - (a+c)y^2 - (a+b)z^2 \\ = (\lambda-u)(\lambda-v), \end{aligned}$$

nous donne

$$\begin{aligned} u + v &= a + b + c - x^2 - y^2 - z^2, \\ uv &= ab + bc + ac - (b + c)x^2 \\ &\quad - (a + c)y^2 - (a + b)z^2, \end{aligned}$$

et en tenant compte de (1) on a

$$uv = \frac{bc}{a} x^2 + \frac{ac}{b} y^2 + \frac{ab}{c} z^2.$$

Substituant ces expressions dans (2) on a la courbure moyenne

$$(3) \quad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = -\sqrt{abc} \frac{a + b + c - x^2 - y^2 - z^2}{\left(\frac{bc}{a} x^2 + \frac{ac}{b} y^2 + \frac{ab}{c} z^2 \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

2. Écrivons maintenant cette formule avec les notations de Poincaré (*Figures d'équilibre d'une masse fluide*, leçons professées en 1900, ou *Acta mathematica*, t. VII). Dans ces notations, pour les coordonnées elliptiques dans l'espace, on prend les racines ρ , μ , ν de l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a_1^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b_1^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c_1^2} = 1.$$

Les fonctions de Lamé R_i , M_i , N_i s'écrivent

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{\rho^2 - a_1^2}, & R_2 &= \sqrt{\rho^2 - b_1^2}, & R_3 &= \sqrt{\rho^2 - c_1^2}, \\ R_4 &= \sqrt{(\rho^2 - b_1^2)(\rho^2 - c_1^2)}, & R_5 &= \sqrt{(\rho^2 + c_1^2)(\rho^2 - a_1^2)}, \\ R_6 &= \sqrt{(\rho^2 - a_1^2)(\rho^2 - b_1^2)}, & & \dots \end{aligned}$$

M_i et N_i s'obtiennent en remplaçant successivement ρ par μ et ν .

L'équation de l'ellipsoïde sera alors

$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} + \frac{z^2}{R_3^2} - 1 = 0.$$

Ensuite, posant

$$h_1^2 = (a_1^2 - b_1^2)(a_1^2 - c_1^2),$$

$$h_2^2 = (b_1^2 + a_1^2)(b_1^2 - c_1^2),$$

$$h_3^2 = (c_1^2 - a_1^2)(c_1^2 - b_1^2),$$

on a

$$x = h_1 R_1 M_1 N_1, \quad y = h_2 R_2 M_2 N_2, \quad z = h_3 R_3 M_3 N_3;$$

enfin, comparant avec les notations de M. Darboux, on a

$$a = R_1^2, \quad b = R_2^2, \quad c = R_3^2,$$

et la formule (3) s'écrit

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = -R_1 R_2 R_3 \frac{R_1^2 - R_2^2 + R_3^2 - x^2 - y^2 - z^2}{\left(\frac{R_2^2 R_3^2}{R_1^2} x^2 + \frac{R_1^2 R_3^2}{R_2^2} y^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_3^2} z^2 \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Remplaçant x, y, z dans le dénominateur par leurs valeurs, on trouve

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = -R_1 R_2 R_3 \frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - x^2 - y^2 - z^2}{(h_1^2 M_1^2 N_1^2 R_4^2 + h_2^2 M_2^2 N_2^2 R_5^2 + h_3^2 M_3^2 N_3^2 R_6^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Mais, dans ces notations, les cosinus de la normale avec les axes coordonnées sont

$$\cos(n, x) = l h_1 M_1 N_1 R_4,$$

$$\cos(n, y) = l h_2 M_2 N_2 R_5,$$

$$\cos(n, z) = l h_3 M_3 N_3 R_6,$$

où l'on pose

$$l = \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - u^2)(\rho'^2 - v^2)}} = \frac{P}{R_1 R_2 R_3},$$

P étant la distance du centre au plan tangent à l'ellipsoïde au point (x, y, z) .

Remarquant, de plus, que le volume de l'ellipsoïde est

$$T = \frac{4}{3} \pi R_1 R_2 R_3$$

et désignant par

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2$$

le carré de la diagonale du parallélépipède construit sur les demi-axes, et par

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

le carré du rayon vecteur du point (x, y, z) , nous aurons définitivement

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = -\frac{3}{4\pi} T(R^2 - r^2) l^3 = -\frac{16\pi^2}{9T^2} (R^2 - r^2) P^3.$$

3. Pour le cylindre elliptique, un des rayons principaux de courbure est infini, et la courbure moyenne se ramène à la courbure de l'ellipse de la section droite. Employant des notations analogues à celles de Poincaré (*Comptes rendus*, t. 159, p. 646) on a

$$\begin{aligned} x &= h R_1 M_1, & y &= h R_2 M_2, & h M_1 &= \sin \nu, & h M_2 &= \cos \nu, \\ \cos(n, x) &= h l M_1 R_2, & \cos(n, y) &= h l M_2 R_1; \end{aligned}$$

l'aire de l'ellipse est

$$A = \pi R_1 R_2.$$

Portant ces valeurs dans la formule connue

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dx \, d^2 y - dy \, d^2 x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}},$$

on trouve

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{h^2 R_1 R_2 (M_2^2 + M_1^2)}{(h^2 R_1^2 M_2^2 + h^2 R_2^2 M_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\pi} A l^3 = \frac{\pi^2}{\Lambda^2} P^3,$$

P désignant toujours la distance du centre à la tangente au point (x, y) .