

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 236-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__236_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Étant donnés trois axes rectangulaires OX, OY, OZ et une surface $z = F(x, y)$, former l'équation différentielle des lignes tracées sur la surface, et telles que la tangente à l'une de ces lignes en un point quelconque et la tangente conjuguée à la surface au même point aient pour projections orthogonales sur le plan XOY deux droites rectangulaires. Faire voir qu'il existe sur la surface deux familles de lignes jouissant de cette propriété, et qu'elles forment un réseau conjugué.*

En supposant que la surface ait pour équation

$$z = a \frac{y}{x},$$

où a désigne une longueur donnée, effectuer l'intégration de l'équation différentielle, reconnaître la nature des courbes qui composent le réseau orthogonal obtenu en projection sur le plan XOY, et déterminer les deux lignes de ce dernier réseau qui passent par un point donné du plan.

II. *Les axes OX, OY, OZ étant supposés rectangulaires, on mène par un point A, situé sur la partie positive de l'axe OX à une distance donnée a de l'origine, une parallèle Δ à l'axe OY et l'on considère la surface Σ ayant pour génératrice une droite mobile assujettie à la triple condition de s'appuyer constamment sur l'axe OZ, sur la droite Δ et de rester constamment à la distance a de l'origine : représenter analytiquement la surface Σ et faire voir que, en désignant par P le pied de la perpendi-*

culaire menée de l'origine sur la génératrice, le lieu du point P est une ligne de courbure de Σ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Évaluer l'intégrale définie

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + 2 \cos x}{(5 - 3 \cos x)^2} dx.$$

(Juin 1914.)

Clermont.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Trouver l'équation différentielle dont dépend, sur une surface donnée, un système de courbes conjuguées se projetant sur un plan, également donné, suivant un système de courbes orthogonales. Cas où la surface est une quadrique et le plan un de ses plans principaux; intégration de l'équation obtenue. Trouver les surfaces pour lesquelles le système de courbes orthogonales se réduit aux deux familles de droites parallèles aux axes.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Si, par un point C pris sur la directrice d'une chaînette, on mène deux tangentes CA, CD à la chaînette, l'arc AD et la ligne brisée ACD décrivent des surfaces égales en tournant autour de la directrice.

(Juin 1914.)

Lyon.

COMPOSITION ÉCRITE. — Étudier l'équation aux dérivées partielles

$$q^2 y^2 + 3 p x z = 0.$$

1. Chercher une intégrale complète de cette équation, en observant que les équations différentielles des caractéristiques admettent l'intégrale première

$$3 p x + a^2 z = 0,$$

où a est une constante arbitraire.

2. Quel est le complexe des courbes caractéristiques?

3. Écrire l'équation du cône T, enveloppe du plan

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

quand, x, y, z étant fixes, on a

$$q^2 y^2 + 3p x z = 0.$$

Quelle est l'équation aux différentielles totales des courbes intégrales? Trouver l'équation d'une courbe intégrale quelconque en la considérant comme l'enveloppe des courbes caractéristiques situées sur une surface intégrale générale.

4. Il est aisé de vérifier que la cubique $x = t, y = t^2, z = t^3$ est une courbe intégrale. Quelle est la surface intégrale qui passe par cette courbe?

5. Existe-t-il des surfaces intégrales dont l'équation soit de la forme $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$?

6. Quelles sont les lignes asymptotiques de la surface intégrale complète et, en particulier, des surfaces trouvées aux nos 4 et 5?

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Calculer l'intégrale

$$\iint x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy,$$

étendue à la surface d'un tore engendré par la circonférence $y = 0, (x - a)^2 + z^2 = y^2$ tournant autour de Oz .

II. Calculer $\int \frac{du}{p'u + a}$, où a est une constante.

(Juillet 1914.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — On donne l'équation différentielle

$$(x - y)(y' - 1) - x(x - y + 2)y' = 0.$$

En déterminer des solutions particulières de la forme

$$y = \alpha x + \beta,$$

α et β étant des constantes. Trouver un facteur intégrant

du type $(X + Y)^m$, X et Y étant respectivement fonctions de x seul et de y seul.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère l'intégrale

$$\int \cot \pi z \frac{dz}{z^{2m}},$$

prise, dans le plan complexe, le long d'un cercle ayant son centre à l'origine, et pour rayon $n + \frac{1}{2}$ (n et m entiers positifs).

En déduire que l'expression $\frac{1}{\pi^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}$ est un nombre rationnel, facilement calculable au moyen des coefficients du développement de

$$\cot z = \frac{1}{z} + \alpha_1 z + \alpha_3 z^3 + \dots$$

$$\text{Calculer } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} \text{ pour } m = 1, 2, 3. \quad (\text{Juin 1914.})$$

Rennes.

COMPOSITION ÉCRITE. — I. Déterminer les surfaces intégrales de l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$(E) \quad px + qy - \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} = 0.$$

II. Soit z l'une quelconque des surfaces intégrales de l'équation E :

1° Montrer que si l'on pose $\sqrt{x^2 + y^2} = \sin u$, les coordonnées d'un point quelconque M de z peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} x &= \sin u \cos v, & y &= \sin u \sin v, \\ z &= \cos u + \log \tan \frac{u}{2} + \varphi(v), \end{aligned}$$

$\varphi(v)$ désignant une fonction de la seule variable v , et v étant l'angle que le plan MO z fait avec le plan zOx ;

2° Démontrer que les courbes $v = \text{const.}$ sont planes et que le plan de chacune d'elles coupe la surface ε sous un angle constant;

3° Déterminer le second système de lignes de courbures de la surface ε et montrer qu'il est composé de courbes sphériques;

4° Calculer, en utilisant l'une des formules d'Olinde Rodrigues, les rayons de courbures principaux en un point quelconque M de ε .

III. Soit ε_0 la surface ε particulière définie par les équations

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u + \log \tan \frac{u}{2};$$

1° Quelle est la nature de cette surface ε_0 , quelles sont ses lignes de courbure?

2° Déterminer les lignes asymptotiques de ε_0 ;

3° Quelles sont les valeurs des rayons de courbure principaux en un point quelconque de ε_0 ? Montrer que leur produit est constant.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4};$$

1° En décomposant en fractions rationnelles;

2° En appliquant la théorie des résidus.

Faire ensuite le changement de variable

$$x = \tan y$$

et en déduire l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - \cos u}{1 + \cos^2 u} du.$$

(Juin 1914.)

