

MYLLER-LEBEDEFF

Sur un théorème d'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 228-231

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__228_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[A4e]**SUR UN THÉORÈME D'ALGÈBRE ;**

PAR M. MYLLER-LEBEDEFF,

Maître de conférences à l'Université de Jassy (Roumanie).

On sait l'importance de la résolution de l'équation binôme

$$x^n = 1,$$

à l'aide de racines carrées, pour la Géométrie, notamment pour la construction des polygones réguliers au moyen de la règle et du compas. La discussion est fondée sur ce théorème :

Une équation irréductible qui peut être résolue au moyen d'extractions de racines carrées doit être d'un degré égal à une puissance de 2.

La démonstration habituelle de ce théorème (voir, par exemple, KLEIN, *Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire*, p. 13-21) exige la discussion assez longue, d'ailleurs élémentaire, de la forme normale de la racine de l'équation, la construction de l'équation à laquelle satisfont toutes les valeurs conjuguées de la racine, et enfin la construction de l'équation du degré minimum, qu'on démontre être irréductible et unique; on emploie aussi nécessairement les propriétés des fonctions irréductibles.

Dans ce qui suit, nous donnons une autre démonstration plus courte du théorème énoncé, fondée uniquement sur les propriétés des fonctions irréductibles

et sur l'irréductibilité de la fonction $x^2 - a$, si a n'est pas carré d'un autre nombre du corps $R(a)$, le corps ou le domaine de rationalité étant défini comme d'ordinaire.

Démonstration. — Soit $f(x) = 0$ une équation irréductible du degré m résoluble à l'aide de racines carrées. $f(x)$ devient réductible après l'adjonction d'une racine de l'équation

$$(1) \quad x^2 - a = 0; \quad "$$

$f(x)$ étant encore irréductible dans le corps $R(a)$; nommons cette racine α et soit

$$(2) \quad f(x) = f_1(x, \alpha) f_2(x, \alpha),$$

où $f_1(x, \alpha)$, $f_2(x, \alpha)$ sont des polynômes en x de degré m_1 , m_2 respectivement, dont les coefficients sont fonctions rationnelles de α .

L'identité (2) en x peut être considérée comme une équation en α dont les coefficients appartiennent au corps $R(a)$. L'équation (2), ayant une racine commune avec l'équation irréductible (1), doit être satisfaite aussi par l'autre racine de l'équation (1), d'après la propriété fondamentale des équations irréductibles.

Par conséquent,

$$(3) \quad f(x) = f_1(x, -\alpha) f_2(x, -\alpha).$$

En multipliant (2) et (3), on aura

$$f^2(x) = f_1(x, \alpha) f_1(x, -\alpha) f_2(x, \alpha) f_2(x, -\alpha).$$

Or

$$(4) \quad f_1(x, \alpha) f_1(x, -\alpha) = F_1(x),$$

où $F_1(x)$ est un polynôme du degré $2m_1$, ayant ses

coefficients rationnels dans $R(a)$. De même

$$f_2(x, \alpha) f_2(x, -\alpha) = F_2(x).$$

Mais si

$$f^2(x) = F_1(x) F_2(x),$$

il s'ensuit

$$(5) \quad \begin{cases} F_1(x) = f(x), \\ F_2(x) = f(x), \end{cases}$$

car $f(x)$ est irréductible dans $R(a)$.

L'hypothèse $F_1(x) = 1$, $F_2(x) = f^2(x)$ doit être rejetée, car $f_1(x, \alpha)$ n'est pas une constante. La comparaison de (5) à (4) donne

$$f(x) = f_1(x, \alpha) f_1(x, -\alpha)$$

et

$$m = 2m_1.$$

Avec le facteur $f_1(x, \alpha)$ on peut maintenant procéder comme avec $f(x)$. On a seulement à démontrer d'abord que $f_1(x, \alpha)$ est irréductible dans le corps de ses coefficients, c'est-à-dire dans $R(\alpha)$.

En effet, soit au contraire

$$f_1(x, \alpha) = \varphi_1(x, \alpha) \varphi_2(x, \alpha).$$

Comme cette relation peut être envisagée comme une équation en α avec des coefficients rationnels, on a aussi

$$f_1(x, -\alpha) = \varphi_1(x, -\alpha) \varphi_2(x, -\alpha).$$

En multipliant ces deux relations on aura

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi_1(x, \alpha) \varphi_1(x, -\alpha) \varphi_2(x, \alpha) \varphi_2(x, -\alpha) \\ &= \Phi_1(x) \Phi_2(x), \end{aligned}$$

où $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ sont des polynômes dont les coefficients appartiennent au corps $R(a)$, ce qui ne peut pas être, $f(x)$ étant irréductible dans $R(a)$.

La fonction $f_1(x, \alpha)$, irréductible et du degré m_1 , devient réductible après l'adjonction à $R(\alpha)$ d'une certaine racine carrée β qui satisfait à l'équation

$$x^2 - b = 0,$$

$f_1(x, \alpha)$ étant encore irréductible après l'adjonction de b à $R(\alpha)$. On peut donc appliquer le raisonnement précédent et conclure que

$$m_1 = 2m'_1.$$

En continuant ainsi jusqu'à ce qu'on parvienne à un facteur linéaire de $f(x)$, on établit que $m = 2^n$.