

AURIC

Généralisation du théorème de Kariya

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 222-225

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__222_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

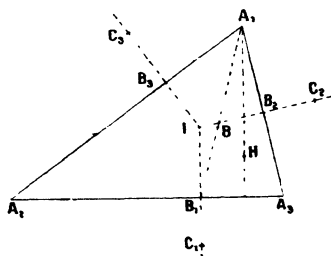
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K'2d]

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE KARIYA ;

PAR M. AURIC.

Le théorème de Kariya s'énonce comme il suit :
Dans un triangle $A_1A_2A_3$ abaissons du centre du



cercle inscrit I les perpendiculaires IB_1 , IB_2 , IB_3 sur les côtés et, sur ces perpendiculaires, prenons des

longueurs égales $IC_1 = IC_2 = IC_3$. Les droites A_1C_1 , A_2C_2 , A_3C_3 concourent en un point C dont le lieu est une conique circonscrite à $A_1A_2A_3$.

Lorsque C_1 vient en B_1 , C_2 en B_2 , C_3 en B_3 , le point de concours B est le point de Gergonne.

Lorsque C_1 , C_2 , C_3 s'éloignent à l'infini, le point de concours H est l'orthocentre.

On peut démontrer facilement que I , B , H sont sur une conique circonscrite à $A_1A_2A_3$ ou, ce qui revient au même, que les inverses de ces points sont en ligne droite.

On a, en effet, comme coordonnées barycentriques de ces inverses :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{I} \right) & \quad \frac{1}{\sin A_1}, \quad \frac{1}{\sin A_2}, \quad \frac{1}{\sin A_3}, \\ \left(\frac{1}{B} \right) & \quad \cot \frac{A_1}{2}, \quad \cot \frac{A_2}{2}, \quad \cot \frac{A_3}{2}, \\ \left(\frac{1}{H} \right) & \quad \cot A_1, \quad \cot A_2, \quad \cot A_3; \end{aligned}$$

d'où symboliquement

$$\left(\frac{1}{I} \right) + \left(\frac{1}{H} \right) = \frac{1 + \cos A_1}{\sin A_1} = \cot \frac{A_1}{2}, \quad \cot \frac{A_2}{2}, \quad \cot \frac{A_3}{2} = \left(\frac{1}{B} \right).$$

D'une manière générale considérons quatre points M , N , P , Q situés sur une conique quelconque circonscrite à $A_1A_2A_3$.

D'après le théorème sur la constance du rapport anharmonique on a

$$A_1(MNPQ) = A_2(MNPQ) = A_3(MNPQ);$$

dès lors ces faisceaux découpent sur les droites quelconques Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 des divisions homographiques et, en appelant M_i , N_i , P_i , Q_i les points d'intersection avec Δ_i ,

on aura

$$(M_1 N_1 P_1 Q_1) = (M_2 N_2 P_2 Q_2) = (M_3 N_3 P_3 Q_3).$$

Si M, N, P sont fixes sur la conique et Q variable, il est clair que de l'égalité ci-dessus résulte le théorème suivant :

Soient trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sur lesquelles sont tracées les intersections avec les faisceaux

$$A_1(MNP), \quad A_2(MNP), \quad A_3(MNP).$$

Si l'on prend des points Q_1, Q_2, Q_3 de manière à avoir des rapports anharmoniques égaux

$$(M_1 N_1 P_1 Q_1) = (M_2 N_2 P_2 Q_2) = (M_3 N_3 P_3 Q_3),$$

les droites $A_1 Q_1, A_2 Q_2, A_3 Q_3$ concourent en un point Q dont le lieu est la conique circonscrite à $A_1 A_2 A_3$ et passant par M, N, P.

Ce théorème est la généralisation de celui de Kariya car il suffit de prendre comme droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ les perpendiculaires IB_1, IB_2, IB_3 et de considérer sur ces droites des divisions homographiques ayant même point à l'infini, c'est-à-dire des divisions semblables

$$\frac{IB_1}{IC_1} = \frac{IB_2}{IC_2} = \frac{IB_3}{IC_3},$$

d'où

$$IC_1 = IC_2 = IC_3,$$

puisque

$$IB_1 = IB_2 = IB_3.$$

Si les quatre points M, N, P, Q sont en ligne droite, il est clair que

$$A_1(MNPQ) = A_2(MNPQ) = A_3(MNPQ)$$

et l'on obtient sur $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ des divisions homogra-

phiques avec

$$(M_1 N_1 P_1 Q_1) = (M_2 N_2 P_2 Q_2) = (M_3 N_3 P_3 Q_3).$$

Dès lors, si M , N , P sont fixes et Q variable sur cette droite en prenant sur les droites Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 des rapports anharmoniques égaux, on obtiendra des points Q_1 , Q_2 , Q_3 tels que $A_1 Q_1$, $A_2 Q_2$, $A_3 Q_3$ concourent en Q dont le lieu est la droite MNP .

Lorsque M est en O centre du cercle circonscrit, N au barycentre G et P à l'orthocentre H , le lieu de Q est la droite d'Euler et l'on obtient le théorème de Francke en prenant pour droites Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 les perpendiculaires abaissées de O sur les côtés du triangle et sur ces droites des divisions semblables.