

F. BALITRAND

Note sur la cardioïde

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 214-222

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__214_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M'8a]

NOTE SUR LA CARDIOÏDE ;

PAR M. F. BALITRAND.

La cardioïde est l'épicycloïde engendrée par un point d'un cercle mobile roulant extérieurement sur un cercle fixe de rayon égal. On en déduit immédiatement, comme nous allons le montrer, qu'elle est aussi la podaire et la conchoïde du cercle fixe par rapport à un point de sa circonférence.

Désignons, à cet effet, par O et O_1 les centres de deux cercles, par α leur rayon commun, par M leur point de contact actuel, par AA_1 un diamètre fixe du cercle fixe. Prenons sur le cercle mobile un point P tel que

$$\text{arc } MP = \text{arc } MA ;$$

le lieu du point P , quand M varie sur le cercle fixe, est par définition une cardioïde ayant un point de rebroussement en A .

La tangente commune en M aux deux cercles est perpendiculaire sur AP et passe par son milieu T . Le lieu de T , podaire du cercle fixe par rapport au point A , est une cardioïde, puisqu'il est homothétique du lieu du point P .

Soit A' le second point d'intersection de AP avec le cercle fixe. Abaissons de O la perpendiculaire OT' sur AA' . On a $TT' = \alpha$ et par suite $A'P = 2\alpha$. Le lieu du point P est donc une conchoïde du cercle fixe par rapport au point A .

Le point M étant le centre instantané de rotation, la

droite PM est la normale en P à la cardioïde. Soit P' son second point d'intersection avec le cercle fixe. MP' est égal à MP et par suite à MA. Le triangle PAI' est rectangle en A et M est le milieu de son hypoténuse. De plus, AP' est perpendiculaire à OM, c'est-à-dire parallèle à MT et les points A' et P' sont diamétralement opposés sur le cercle fixe.

On peut déduire de là plusieurs modes de génération de la cardioïde. Nous nous contenterons d'indiquer le suivant qui fournit à la fois un point de la courbe et la normale en ce point :

De chaque point M d'un cercle fixe comme centre, on décrit un cercle passant par un point fixe A du premier et le coupant en un second point P'. La droite P'M rencontre le cercle variable en un autre point P. Le lieu de P est une cardioïde et la droite PM est la normale en P à la courbe.

Prenons sur AA', à partir de A' et dans le sens AA', une longueur égale à $2a$. Nous obtenons ainsi un point Q appartenant à la cardioïde. La construction connue de la normale à la conchoïde nous montre que la normale en Q est la droite QP'. On a d'ailleurs

$$A'P = A'Q = A'P' = 2a.$$

L'angle PP'Q est donc droit et les normales en P et Q sont rectangulaires. Il en est par suite de même des tangentes en ces points, et celles-ci se coupent en un point R qui complète le rectangle PP'QR.

La droite P'A', qui passe par le milieu de la diagonale PQ, est aussi une diagonale. Il en résulte qu'elle passe en R et qu'on a $OR = 3a$. Le lieu de ce dernier point est donc un cercle concentrique au cercle fixe et

de rayon triple. Ce qui précède peut se résumer comme il suit :

Si, d'un point d'un cercle concentrique au cercle fixe et de rayon triple, on mène les tangentes à la cardioïde, deux de ces tangentes sont rectangulaires.

La distance des points de contact est constante et égale à $4a$.

La droite qui joint les points de contact passe par un point fixe qui est le point de rebroussement de la cardioïde.

Le milieu de cette droite décrit le cercle fixe.

Le point de rencontre des normales, aux points de contact des tangentes, décrit le cercle fixe.

Le segment PQ étant de grandeur constante, son déplacement peut être obtenu par le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe.

La première, qui est le lieu du centre instantané de rotation dans le plan mobile, se confond avec le cercle décrit sur PQ comme diamètre, puisque l'angle $PP'Q$ est constamment droit. La seconde, lieu du centre instantané dans le plan fixe, coïncide ici avec le lieu du point P' , c'est-à-dire avec le cercle fixe. Le déplacement de PQ est donc réalisé par le roulement intérieur d'un cercle de rayon $2a$ sur un cercle de rayon a .

On sait que, dans le roulement intérieur d'un cercle sur un cercle de rayon double, un point quelconque de sa circonférence décrit un diamètre du cercle fixe (théorème de Cardan).

Ici, c'est le mouvement inverse qui a lieu, c'est-à-dire le mouvement que paraît avoir le cercle fixe pour un spectateur invariablement lié au cercle mobile. Mais le point décrivant et le diamètre décrit sont

toujours *réunis de situation* et par suite un diamètre quelconque du cercle mobile passe par un point fixe; tandis que ses deux extrémités engendrent une seule et même cardioïde admettant le point fixe pour point de rebroussement.

Lorsqu'un plan mobile se déplace sur un plan fixe, les centres de courbure de toutes les courbes enveloppées par les droites du plan mobile sont sur un cercle, dit *cercle des rebroussements*, qui passe au centre instantané de rotation et y touche les deux courbes, fixe et mobile. Ici, ce cercle, qui contient nécessairement le point A, se confond avec le cercle fixe.

Le cercle des inflexions est le symétrique du précédent par rapport à la tangente commune aux deux courbes, au centre instantané de rotation, c'est-à-dire par rapport à la tangente en P' au cercle fixe. Sa connaissance entraîne celle des centres de courbure de la cardioïde en P et Q.

En effet, si l'on désigne par P₁ et Q₁ les intersections des normales PP' et QP' avec le cercle des inflexions, par p et q les centres de courbure correspondants, on a les relations

$$Pp = \frac{PP'^2}{PP_1} = \frac{2}{3} PP' = \frac{4}{3} PM,$$

$$Qq = \frac{QP'^2}{QP_1} = \frac{2}{3} QP' = \frac{4}{3} QM'.$$

Il résulte de ces égalités que les points p et q sont sur une parallèle à PQ et que le segment pq est le tiers de PQ. Ainsi :

Le rayon de courbure en un point d'une cardioïde est égal aux $\frac{4}{3}$ du segment de normale com-

pris entre le point d'incidence et le point correspondant du cercle fixe.

Les centres de courbure correspondant à deux points de la courbe où les tangentes sont rectangulaires sont sur une parallèle à la droite qui joint les points de contact et leur distance est égale au tiers de la distance des points de contact.

Le segment pq étant de grandeur constante peut, à son tour, être considéré comme entraîné dans le déplacement d'une courbe mobile sur une courbe fixe. On démontrerait, comme nous venons de le faire, que, ici, la courbe mobile est le cercle décrit sur pq comme diamètre, puisque l'angle $pP'q$ est droit, et que la courbe fixe est le cercle de centre O et de rayon $\frac{a}{3}$.

Les points p et q décrivent donc une cardioïde et l'on voit sans peine que son point de rebroussement est situé sur le diamètre AA_1 , du même côté que A_1 , et à une distance de O égale à $\frac{a}{3}$. De là il résulte que :

La développée d'une cardioïde est une autre cardioïde, homothétique inverse de la proposée, le centre d'homothétie étant le centre du cercle fixe et le rapport d'homothétie $\frac{1}{3}$.

Les deux triangles MOA , MOP' sont égaux comme ayant les trois côtés égaux. Les angles OMA , OMP' sont égaux et si AM est un rayon lumineux, MP' est le rayon réfléchi.

La caustique par réflexion d'un cercle, le point lumineux étant un point de sa circonférence, est donc une cardioïde.

Les arcs de cercle P'M et MA sont égaux; donc l'arc P'MA est double de l'arc MA. On démontrerait, comme nous l'avons fait dans la Note sur la *Néphroïde de Proctor*, que, dans ces conditions, la droite P'M enveloppe une courbe qu'elle touche en un point p , déterminé par l'égalité $Mp = \frac{1}{3} MP'$. Si l'on trace ensuite le cercle de centre O et de rayon $\frac{a}{3}$, qui coupe OM en ω , et le cercle, également de rayon $\frac{a}{3}$, décrit sur ωM comme diamètre, cercle qui passe en p , on prouverait, toujours comme dans la Note précitée, que le lieu du point p n'est autre que celui décrit par un point d'un cercle mobile roulant extérieurement sur un cercle fixe de rayon égal. Ainsi :

Si deux mobiles, partant d'un même point, se meuvent sur un cercle, dans le même sens, avec des vitesses dans le rapport de 2 à 1, la droite qui les joint enveloppe une cardioïde.

L'arc de cercle P'MA étant double de l'arc MA, si l'on ajoute au premier 2π et au second π , on obtient encore deux arcs de cercle dans le rapport de 2 à 1. Or, par cette opération, on tombe évidemment sur les points P' et M', ce dernier étant diamétralement opposé au point M. La droite P'M' est donc une tangente de la cardioïde. Pour trouver la troisième tangente à cette courbe, issue de P', il suffit de prendre sur le cercle un point P'' tel que $\text{arc } P'P'' = \text{arc } P'A$. Mais alors le triangle AP'P'' est isocèle et la droite OP' est perpendiculaire sur AP''; autrement dit, elle est parallèle à A, P'', puisque l'angle A, P'' A est droit. D'où ce mode de génération de la cardioïde :

Soient A un point fixe et P' un point variable

d'un cercle. Menons le diamètre M'OM du cercle perpendiculaire à P'A. Les droites P'M et P'M' enveloppent une cardioïde. La troisième tangente à cette courbe, issue de P', s'obtient en menant Λ, P'' parallèle à OP' (Λ , diamétralement opposé à A) et joignant $P'P''$.

L'angle $P'A, A$, qui a pour mesure la moitié de l'arc $P'MA$, est égal à l'angle MOA , qui a pour mesure l'arc MA . D'où ce nouveau mode de génération, qui ne diffère pas au fond du précédent :

Par un point fixe d'un cercle, et par son centre, on mène deux segments variables, parallèles et de même sens; la droite, qui joint leurs points de rencontre avec le cercle, enveloppe une cardioïde.

Passons maintenant à la rectification et à la quadrature de la cardioïde.

Si l'on désigne par ε l'angle de contingence commun des deux cercles au point M, par $d\sigma$ l'élément d'arc de la courbe, on a

$$d\sigma = MP \times \varepsilon.$$

Appelons φ l'angle MOA ; on a

$$\varepsilon = d\varphi, \quad MP = MA = 2a \sin \frac{\varphi}{2};$$

par suite,

$$d\sigma = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \times \frac{d\varphi}{2},$$

$$\sigma = 8a \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right).$$

Mais la flèche de l'arc de cercle MA (ou MP) est égale à $a - a \cos \frac{\varphi}{2}$. Donc :

L'arc de cardioïde, compté à partir du point de

rebroussement, est égal à huit fois la flèche de l'arc correspondant du cercle générateur.

La longueur totale de la cardioïde est égale à huit fois le diamètre du cercle générateur.

On peut encore énoncer la proposition suivante :

La longueur de l'arc de cardioïde, compris entre le point de rebroussement et le sommet de la courbe, est double de la corde qui le sous-tend.

Pour trouver l'aire de la courbe, nous considérerons le quadrilatère infinitésimal limité par l'arc infiniment petit du cercle fixe, par l'arc correspondant de la cardioïde et par les deux droites qui joignent les extrémités de ces arcs.

Ce quadrilatère se divise à son tour en deux secteurs. Le premier a pour sommet le point décrivant P, et pour base l'élément du cercle mobile. Il a pour expression $\frac{1}{2} \overline{PM}^2 d\omega$, ω désignant l'angle polaire, c'est-à-dire l'angle du rayon vecteur PM avec la tangente en P au cercle mobile. Pour un déplacement fini de ce dernier, la somme de ces secteurs élémentaires est égale au secteur du cercle mobile dont la corde est PM.

Le second a pour sommet le point M et pour base l'élément de la cardioïde. Son expression est

$$\frac{1}{2} MP \times d\sigma = 4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi = 2a^2(1 - \cos \varphi) d\varphi.$$

La somme de ces éléments est égale à

$$2a^2(\varphi - \sin \varphi);$$

soit quatre fois la surface du secteur correspondant du cercle mobile, ou du cercle fixe; car les deux secteurs sont égaux. Ainsi :

Le secteur curviligne limité par un arc de cardioïde, compté à partir du point de rebroussement, et les arcs correspondants des cercles fixe et mobile, est égal à quatre fois le secteur correspondant du cercle mobile (ou du cercle fixe).

On peut dire aussi que la surface limitée par l'arc de cardioïde AP et les deux droites MA, MP, est égale à six fois la surface du secteur du cercle mobile dont la corde est MP, ou celle du secteur du cercle fixe de corde MA. De plus, *l'aire totale de la cardioïde est égale à six fois l'aire du cercle générateur.*