

Note sur la courbe de Viviani

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 170-175

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__170_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M³6b α]

NOTE SUR LA COURBE DE VIVIANI ;

PAR UN ANONYME.

Les théorèmes énoncés par M^{lle} Anne de Préhyr, sur la courbe de Viviani, dans le numéro d'août septembre 1914 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, se démontrent aisément par la Géométrie analytique.

Soient

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0,$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 - ax = 0$$

les équations de la sphère et du cylindre dont l'intersection constitue la courbe de Viviani. Désignons par A l'extrémité du diamètre du cercle (2) dirigé suivant Ox, par M un point quelconque de ce cercle, par φ l'angle MOA. Les coordonnées du point M sont $a \cos^2 \varphi$ et $a \sin \varphi \cos \varphi$. Si l'on cherche l'intersection de la verticale menée par ce point avec la sphère, on trouve que l'ordonnée du point P, ainsi obtenu, est égale à $a \sin \varphi$. Les coordonnées de P sont donc

$$(3) \quad x = a \cos^2 \varphi, \quad y = a \sin \varphi \cos \varphi, \quad z = a \sin \varphi.$$

La dernière montre que l'ordonnée MP est égale à MA. Donc les triangles OMP et OMA sont égaux et, par suite, aussi les angles $\widehat{MOA}$ et $\widehat{MOP}$.

On peut encore dire que le lieu du point P s'obtient en faisant tourner les triangles MOA, autour de OM, de manière à les amener dans le plan vertical MOz.

Si, sur MP, on prend un point P₁ tel que MP₁ = MO, le lieu du point P₁ est une courbe dont l'étude peut utilement être associée à celle de la courbe de Viviani. Le triangle OMP₁ étant rectangle et isocèle, on voit que la courbe en question résulte de l'intersection du cylindre (2) et du cône de révolution

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Des formules (3) on déduit sans peine

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a \sin 2\varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = a \cos 2\varphi, \quad \frac{dz}{d\varphi} = a \cos \varphi;$$

puis

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = -2a \cos 2\varphi, \quad \frac{d^2y}{d\varphi^2} = -2a \sin 2\varphi, \quad \frac{d^2z}{d\varphi^2} = -a \sin \varphi.$$

Appelons A, B, C les coefficients de l'équation du plan osculateur en P à la courbe : on sait qu'on a

$$A = \frac{dy}{d\varphi} \frac{d^2z}{d\varphi^2} - \frac{dz}{d\varphi} \frac{d^2y}{d\varphi^2}$$

et les formules analogues. En effectuant les calculs, on trouve

$$A = a^2 \sin \varphi (1 + 2 \cos^2 \varphi), \quad B = -2a^2 \cos^3 \varphi, \quad C = 2a^2.$$

Le plan tangent en P à la sphère (1) a pour équation

$$(4) \quad x \cos^2 \varphi + y \sin \varphi \cos \varphi + z \sin \varphi - a = 0.$$

Sa trace sur le plan xOy est représentée par

$$(5) \quad x \cos^2 \varphi + y \sin \varphi \cos \varphi - a = 0.$$

Appelons T le point d'intersection de OM avec la tangente en A au cercle (2). La droite représentée par (5) passe en T et est perpendiculaire à OT. Elle

enveloppe donc une parabole qui a pour sommet le point A et pour foyer le point O.

Pour trouver les coordonnées du point de l'arête de rebroussement de la surface développable enveloppée par les plans tangents à la sphère aux points de la courbe de Viviani, différencions deux fois l'équation (4), nous obtenons

$$(6) \quad x \sin 2\varphi - y \cos 2\varphi - z \cos \varphi = 0,$$

$$(7) \quad 2x \cos 2\varphi + 2y \sin 2\varphi + z \sin \varphi = 0.$$

La première de ces équations représente le plan normal en P à la courbe de Viviani; l'arête de rebroussement est donc bien une développée de cette courbe.

Les coefficients de l'équation (6) sont proportionnels à dx, dy, dz et ceux de l'équation (7) à d^2x, d^2y, d^2z . La droite qu'elles représentent est donc parallèle à la binormale. Ainsi, l'arête de rebroussement de la surface développable est située sur le cône obtenu en menant par le centre de la sphère des parallèles aux binormales de la courbe de Viviani.

Des équations (4), (6), (7) on tire, pour les coordonnées d'un point de l'arête de rebroussement, les valeurs suivantes :

$$x = \frac{\alpha \sin \varphi (1 + 2 \cos^2 \varphi)}{\sin \varphi (2 + \cos^2 \varphi)} = \lambda A,$$

$$y = \frac{-2 \alpha \cos^3 \varphi}{\sin \varphi (2 + \cos^2 \varphi)} = \lambda B,$$

$$z = \frac{2 \alpha}{\sin \varphi (2 + \cos^2 \varphi)} = \lambda C,$$

en posant

$$\lambda = \frac{1}{\alpha \sin \varphi (2 + \cos^2 \varphi)};$$

d'où il résulte que la distance de ce point à l'origine

est égale à

$$(8) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \lambda \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Le plan osculateur en P a pour équation

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

x_0, y_0, z_0 étant les coordonnées de P. Le centre de courbure, d'après le théorème de Meusnier, est situé sur la perpendiculaire abaissée de O sur ce plan. Sa distance à l'origine est égale à

$$R = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

On a donc

$$Rr = \lambda(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$

et, si l'on fait les calculs, on trouve

$$Rr = a^2.$$

La tangente en P a pour équations

$$\frac{x - a \cos^2 \varphi}{-a \sin \lambda \varphi} = \frac{y - a \sin \varphi \cos \varphi}{a \cos 2 \varphi} = \frac{z - a \sin \varphi}{a \cos \varphi}.$$

Elle perce le plan xOy en un point Q dont les coordonnées sont

$$x = a(1 + \sin^2 \varphi), \quad y = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$

Ce point est naturellement situé sur la tangente en M au cercle (2) et la distance MQ est égale à $a \tan \varphi$; c'est-à-dire à MT. De plus, le calcul du coefficient angulaire montre que AQ est parallèle à OT. La figure MTAQ est un rectangle et le lieu du point Q est la cissoïde, podaire de la parabole enveloppée par TQ, par rapport à son sommet.

Puisqu'on sait tracer, avec la règle et le compas, la

tangente à cette courbe qui, avec le point P, détermine le plan osculateur à la courbe de Viviani; on sait, par cela même, construire ce plan et par suite le centre du cercle osculateur qui s'obtient en projetant sur lui le point O.

La droite qui joint le point P au point (0, 0, a) a pour équations

$$\frac{x}{a \cos^2 \varphi} = \frac{y}{a \sin \varphi \cos \varphi} = \frac{z - a}{a \sin \varphi - a}.$$

Sa trace sur xOy est déterminée par les relations

$$y = x \tan \varphi, \quad x = \frac{a \cos^2 \varphi}{1 - \sin \varphi};$$

d'où l'on déduit

$$\sin \varphi = \frac{x^2 + y^2 - ax}{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{y} \frac{x^2 + y^2 - ax}{x^2 + y^2}$$

et par suite

$$(x^2 + y^2)(x - 2a) + a^2 x = 0.$$

Si l'on transporte l'origine des coordonnées au point A, cette équation devient

$$x(x^2 + y^2) + a(x^2 - y^2) = 0,$$

équation d'une strophoïde droite dont le sommet est en O et le point double en A.

Les équations de la droite qui joint P au point $(-a, 0, 0)$ sont

$$\frac{x + a}{\cos^2 \varphi + 1} = \frac{y}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{z}{\sin \varphi}.$$

Sa trace sur le plan yOz , quand φ varie, est la courbe

$$(y^2 + z^2)^2 - a^2(z^2 - y^2) = 0;$$

c'est une lemniscate.

(175)

On trouve de même sans difficulté que la droite

$$\frac{x-a}{\cos^2 \varphi - 1} = \frac{y}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{z}{\sin \varphi},$$

qui joint P au point $(a, 0, 0)$, a pour trace sur ce plan l'hyperbole équilatère

$$z^2 - y^2 = a^2.$$

Enfin, la droite horizontale, qui rencontre à la fois l'axe des z et la courbe de Viviani, a pour équations

$$y = x \tan \varphi, \quad z = a \sin \varphi.$$

Elle engendre le conoïde représenté par

$$z^2(x^2 + y^2) = a^2 y^2.$$

Celui-ci coupe le cylindre

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

suivant deux courbes planes situées dans les plans

$$y \pm z = 0.$$