

E. MALO

**Interprétation concrète de l'expression
 $S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$, en
 Y supposant les coordonnées courantes
remplacées par celles d'un point donné**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 157-166

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__157_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L'1 a]

INTERPRÉTATION CONCRÈTE DE L'EXPRESSION

$$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c,$$

EN Y SUPPOSANT LES COORDONNÉES COURANTES
REPLACÉES PAR CELLES D'UN POINT DONNÉ;

PAR M. E. MALO.

Un des théorèmes les plus simples et les plus connus, mais en même temps l'un des plus intéressants du début de la Géométrie analytique, est le suivant :

Si, dans le premier membre de l'équation d'un cercle, en coordonnées cartésiennes rectangulaires,

$$a(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0,$$

on remplace les coordonnées courantes x, y par les coordonnées x', y' d'un point déterminé, le résultat est égal au produit par a du carré ρ^2 de la tangente menée au cercle par le point (x', y') ou plutôt, par un motif qui apparaîtra de lui-même un peu plus loin, au produit par a du carré ρ^2 du rayon du cercle qui, décrit du point (x', y') comme centre, coupe orthogonalement le cercle donné.

On est, par là même, naturellement amené à rechercher quelle peut être l'interprétation géométrique, la signification concrète du résultat de la substitution aux coordonnées courantes, dans le premier membre de l'équation générale du second degré,

$$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

des coordonnées x', y' d'un point donné. Mais, bien qu'il y ait plus de deux siècles que la question ait dû nécessairement se poser, elle ne paraît pas avoir été résolue d'une façon entièrement satisfaisante et véritablement définitive; et c'est seulement dans le cas où l'on considère non pas un point *unique* (x', y') , mais *deux* points simultanément (x', y') et (x'', y'') , et en comparant les résultats des substitutions, qu'on est parvenu à des théorèmes tels que le suivant (qui d'ailleurs s'étend à des courbes d'ordre quelconque, et conduit, comme corollaire, au théorème de Carnot) :

A et B étant deux points du plan d'une conique, et $\overline{AZ}$, $\overline{BT}$, deux cordes parallèles rencontrant la conique en P, Q, R, S, le rapport $\frac{\overline{AP} \cdot \overline{AQ}}{\overline{BR} \cdot \overline{BS}}$ est une constante indépendante de la direction des cordes.

Cependant, et c'est une référence que M. H. Brocard a eu l'extrême obligeance de me signaler aussitôt que je lui eus communiqué le résultat auquel j'étais parvenu, on trouve dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1864, p. 458) quelques lignes extraites d'une lettre de Trançon à Gerono, avec une remarque de Mannheim; voici en substance ce passage :

« On paraît généralement ignorer que *la substitution des coordonnées d'un point M, dans le premier membre de l'équation d'une conique, est proportionnelle au produit de la perpendiculaire MP, abaissée du point M sur sa polaire, par la longueur interceptée à partir du point M sur la même perpendiculaire par l'un ou l'autre des axes.*

» M. Mannheim a observé que, lorsqu'il s'agit du

point de rencontre avec l'axe *non focal*, ce point appartient au cercle passant par le point P et par les foyers de la conique, de sorte que le produit envisagé est égal au carré de la tangente menée du point M à ce cercle (¹). »

Ce résultat, qui, par suite de la double acception qu'il comporte, n'est pas identique à celui qu'on trouvera ci-après, était resté inconnu de moi, et, ainsi que bien d'autres et après eux, je m'étais à diverses reprises, mais infructueusement, appliqué à la solution du problème, lorsque enfin l'occasion d'une question posée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (n° 4440, 1914, p. 195), me l'a fait inopinément apercevoir.

Comment l'auteur (pseudonyme) de la question, ainsi que l'auteur (également pseudonyme) de la réponse qui y a été faite (*I. M.*, 1915, p. 70), ne se sont-ils pas exactement rendu compte de l'intérêt véritable du sujet? C'est sans doute que le premier a trop exclusivement envisagé le cas de l'ellipse et surtout s'est attaché à des formules où entrassent les *angles excen-*
triques comme paramètres déterminateurs (ce qui n'est aucunement conforme à la position même de la ques-

(¹) La remarque de Mannheim, qui, au fond, ajoute bien peu de chose à l'énoncé de Transon, est en outre incomplète, car, en désignant par K et L, N et Q, les points où la polaire de M et la perpendiculaire menée de M à cette polaire rencontrent respectivement le grand et le petit axe, les cercles de diamètre $\overline{LN}$ et $\overline{KQ}$, qui se coupent orthogonalement en P, passent encore, le premier par les foyers imaginaires, le second par les foyers réels de la conique.

Les relations contenues dans l'énoncé de Transon sont explicitement les suivantes (dans le cas de l'ellipse) :

$$\begin{aligned} b^2 x'^2 + a^2 y'^2 - a^2 b^2 &= a^2 \overline{MP} \cdot \overline{MN}, \\ b^2 x'^2 + a^2 y'^2 - a^2 b^2 &= b^2 \overline{MP} \cdot \overline{MQ}. \end{aligned}$$

tion), et que le second, dans sa réponse, a trop strictement suivi le canevas tracé.

Quoi qu'il en soit, et sans m'assujettir au point de vue où l'un et l'autre se sont limités, j'aborde sans plus tarder l'ordre de considération essentiel à mon objet.

Soit une conique que, d'abord et pour fixer les idées, je supposerai être une ellipse : d'un point M, extérieur, on pourra lui mener deux tangentes $\overline{MR}$, $\overline{MS}$, et ces tangentes seront les bissectrices extérieures, en R et S, des angles $\widehat{FRF'}$, $\widehat{FSF'}$, formés par les vecteurs focaux des deux points de contact. D'ailleurs, par un théorème connu, les droites $\overline{FM}$, $\overline{F'M}$ sont les bissectrices des angles $\widehat{RFS}$, $\widehat{RF'S}$, et de tout cela résulte que les distances du point M aux quatre droites $\overline{FR}$, $\overline{F'R}$, $\overline{FS}$, $\overline{F'S}$ sont égales; en d'autres termes : *Le quadrilatère formé par les rayons vecteurs focaux des points de contact des tangentes issues d'un point M est circonscrit à un cercle admettant ce point pour centre.*

Je cherche maintenant la mesure du rayon de ce cercle.

En désignant par x' , y' les coordonnées du point M, l'équation de la corde $\overline{RS}$, polaire de M, est, en rapportant toute la figure aux axes de l'ellipse,

$$b^2 x'x + a^2 y'y - a^2 b^2 = 0,$$

et par conséquent l'équation du couple de points R, S sera

$$a^4(b^2 - y'^2)\lambda^2 + b^4(a^2 - x'^2)\mu^2 \\ + (b^2 x'^2 + a^2 y'^2)\nu^2 + 2a^2 b^2 (y'\mu\nu + x'\nu\lambda + x'y'\lambda\mu) = 0.$$

L'équation des foyers réels étant d'autre part

$$c^2\lambda^2 - \nu^2 = 0,$$

l'équation générale des coniques inscrites dans le quadrilatère formé par les vecteurs focaux, sera

$$k(c^2\lambda^2 - \nu^2) + a^4(b^2 - y'^2)\lambda^2 + \dots = 0,$$

et le centre aura pour coordonnées

$$\frac{\alpha^2 b^2 x'}{b^2 x'^2 + \alpha^2 y'^2 - k}, \quad \frac{\alpha^2 b^2 y'}{b^2 x'^2 + \alpha^2 y'^2 - k};$$

on obtiendra donc le cercle inscrit en faisant

$$k = b^2 x'^2 + \alpha^2 y'^2 - \alpha^2 b^2.$$

Moyennant cette valeur de k l'équation considérée doit être de la forme

$$(\lambda x' + \mu y' + \nu)^2 - \varrho^2(\lambda^2 + \mu^2) = 0,$$

et cela conduit notamment à poser la relation

$$\frac{y'^2 - \varrho^2}{b^2(\alpha^2 - x'^2)} = \frac{1}{\alpha^2},$$

qui se réduit à

$$b^2 x'^2 + \alpha^2 y'^2 - \alpha^2 b^2 = \alpha^2 \varrho^2.$$

Par conséquent, dans la supposition faite, *le résultat de la substitution des coordonnées du point M (x' , y') aux coordonnées courantes rend le premier membre de l'équation de l'ellipse égal au produit par α^2 du carré du rayon du cercle inscrit dans le quadrilatère des vecteurs focaux aboutissant aux points de contact des tangentes issues du point (x' , y').*

On voit que, si l'ellipse considérée se rapproche indéfiniment de la forme circulaire, le cercle inscrit, de centre M, tend à devenir tangent en R et S aux vec-

teurs $\overline{OR}$, $\overline{OS}$, et, à la limite, il est orthogonal au cercle dans lequel l'ellipse s'est changée.

Si l'on compare le résultat précédent avec ceux de Transon (*voir la note au bas de la page 159*), on trouvera les relations

$$\rho^2 = \frac{b^2}{a^2} \overline{MP} \cdot \overline{MQ},$$

$$\rho^2 = \overline{MP} \cdot \overline{MN},$$

dont la deuxième permet d'énoncer le théorème que voici :

Le cercle inscrit dans le quadrilatère des vecteurs focaux aboutissant aux points de contact des tangentes issues d'un point M coupe orthogonalement le cercle qui admet comme diamètre l'intervalle des points où le grand axe rencontre respectivement la polaire de M et la perpendiculaire abaissée de M sur sa polaire.

Examinant maintenant le cas général de l'équation

$$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

point n'est besoin d'un calcul développé en tout détail pour reconnaître qu'on a

$$S' = \frac{a + b - \sqrt{(a + b)^2 - 4(ab - h^2)}}{2} \rho^2,$$

ρ^2 ayant la même signification que précédemment.

Mais en vue de vérifier qu'il en est bien ainsi on observera tout d'abord qu'on a pour $b = a$, $h = 0$,

$$S' = a\rho^2,$$

ce qui ramène au point même de départ. D'un autre côté, l'équation aux carrés des demi-longueurs d'axes

de la conique $S = 0$ étant

$$t^4 + \frac{(a+b)\Delta}{(ab-h^2)^2} t^2 + \frac{\Delta^2}{(ab-h^2)^3} = 0,$$

on en conclut

$$t^2 = -\frac{\Delta}{(ab-h^2)^2} \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4(ab-h^2)}}{2},$$

et, par conséquent, en supposant Δ négatif, l'axe focal correspond au radical pris positivement, tandis que c'est l'inverse lorsque Δ est positif, si toutefois on a encore $a+b > 0$. D'ailleurs, lorsque le point dont on substitue les coordonnées est le centre de la conique, le résultat doit être $-b^2$, dans le cas de l'ellipse, et $+b^2$, dans le cas de l'hyperbole, comme on le reconnaît avec la plus grande facilité.

L'égalité supposée devient donc, d'une façon générale,

$$S' = -\frac{(ab-h^2)^2}{\Delta} a^2 \rho^2,$$

et, dans l'hypothèse particulièrement faite que (x', y') est le centre,

$$\frac{\Delta}{ab-h^2} = -\frac{(ab-h^2)^2}{\Delta} a^2 \rho^2.$$

Soit $a = b^2$, $b = a^2$, $c = -a^2 b^2$, $h = 0$, $\Delta = -a^4 b^4$; il viendra bien

$$\rho^2 = -b^2,$$

tandis que pour $a = b^2$, $b = -a^2$, $c = -a^2 b^2$, $h = 0$, $\Delta = a^4 b^4$, on trouvera

$$\rho^2 = b^2.$$

Enfin pour $a = c = f = h = 0$, $b = 1$, $g = -p$,

mais le point (x', y') étant quelconque, on aura

$$y'^2 - 2px' = \rho^2,$$

relation qu'il serait aisé d'établir directement.

En raison de ce qui précède et pour envisager maintenant le cas absolument général d'une équation donnée en coordonnées trilinéaires *normales*

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0,$$

on aura, en substituant à x, y, z , les coordonnées *vraies*, c'est-à-dire les rapports

$$\frac{\varpi x'}{x' \sin A + y' \sin B + z' \sin C}, \dots,$$

et non pas les coordonnées simplement proportionnelles x', y', z' du point considéré, ϖ étant mis en abrégé pour $2R \sin A \sin B \sin C$,

$$S' = \frac{\mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}^2 - 4\Sigma_\infty}}{2} \rho^2.$$

ρ^2 ayant toujours la même signification géométrique, $\Sigma = 0$ étant l'équation *tangentielle* de la conique dont $S = 0$ est l'équation ponctuelle, Σ_∞ désignant le résultat de la substitution dans cette équation des coordonnées $\sin A, \sin B, \sin C$, de la droite à l'infini, et $\mathcal{H}$ étant enfin l'expression linéaire

$$a + b + c - 2f \cos A - 2g \cos B - 2h \cos C,$$

qui s'annule quand S est une hyperbole équilatère et devient égale à $2\sqrt{\Sigma_\infty}$ lorsque cette conique est un cercle.

En effet, l'équation aux carrés des demi-longueurs d'axes de la conique S étant cette fois

$$t^4 + \varpi^2 \frac{\mathcal{H} \Delta}{\Sigma_\infty^2} t^2 + \varpi^4 \frac{\Delta^2}{\Sigma_\infty^2} = 0$$

(Δ , discriminant de S, égal à

$$abc - 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2),$$

on en tire les valeurs

$$t^2 = - \frac{\varpi^2 \Delta}{\Sigma_\infty^2} \frac{\mathcal{H} \pm \sqrt{\mathcal{H}^2 - 4 \Sigma_\infty}}{2},$$

d'où

$$\frac{\mathcal{H} \pm \sqrt{\mathcal{H}^2 - 4 \Sigma_\infty}}{2} = - \frac{t^2 \Sigma_\infty^2}{\varpi^2 \Delta}$$

et

$$S' = - \frac{t^2 \Sigma_\infty^2}{\varpi^2 \Delta} \rho^2.$$

Lorsqu'il s'agit du centre on a

$$x' = A \sin A + H \sin B + G \sin C,$$

$$y' = H \sin A + B \sin B + F \sin C,$$

$$z' = G \sin A + F \sin B + C \sin C$$

(A, B, C, F, G, H , coefficients de l'équation tangentielle $\Sigma = 0$, c'est-à-dire $A = \frac{\partial \Delta}{\partial a}, \dots$). Il en résulte

$$x' \sin A + y' \sin B + z' \sin C = \Sigma_\infty,$$

$$ax' + hy' + gz' = \Delta \sin A,$$

$$hx' + by' + fz' = \Delta \sin B,$$

$$gx' + fy' + cz' = \Delta \sin C.$$

$$S' = \varpi^2 \left\{ \frac{x'(ax' + hy' + gz') + y'(hx' + by' + fz') + z'(gx' + fy' + cz')}{(x' \sin A + y' \sin B + z' \sin C)^2} \right\} = \varpi^2 \frac{\Delta}{\Sigma_\infty}$$

et par suite

$$\rho^2 = - \frac{1}{t^2} \frac{\varpi^4 \Delta^2}{\Sigma_\infty^4}.$$

Comme $\frac{\varpi^4 \Delta^2}{\Sigma_\infty^4}$ est le produit des carrés des demi-lon-

guez d'axes, de même signe que Σ_{∞} et positif s'il s'agit d'une ellipse, négatif s'il s'agit d'une hyperbole, l'exactitude de la formule est mise en évidence aussi bien dans l'un que dans l'autre cas, pourvu qu'on entende par t^2 le carré du demi-grand axe, quelles que soient d'ailleurs les contingences qui naissent des signes des quantités Δ et $\mathcal{H}$, où l'on peut simplement supposer positif l'unique coefficient α . Enfin le cas de la parabole n'échappe pas à la formule finale, du moins dans la supposition que le point (x', y', z') est quelconque et en excluant bien entendu qu'il s'agisse du centre, alors rejeté à l'infini : il faut seulement calculer la limite du produit $t^2 \Sigma_{\infty}^2$, de la forme $\infty \times 0$.

Une vérification plus particulière encore peut s'opérer en imaginant que S est le cercle circonscrit au triangle de référence,

$$S = 2(yz \sin A + zx \sin B + xy \sin C) = 0.$$