

G. FONTENÉ

**Points conjugués d'ordre p d'un point
 P ; polaires successives**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 145-156

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__145_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M¹1 c]

**POINTS CONJUGUÉS D'ORDRE ρ D'UN POINT P;
POLAIRES SUCCESSIVES;**

PAR M. G. FONTENÉ.

HISTORIQUE DE LA QUESTION; OBJET DE CETTE NOTE.

1° La notion du *conjugué harmonique* P' d'un point P par rapport à un système de points, au moyen de la formule

$$\frac{m}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \dots + \frac{1}{\rho_m},$$

est due à Cotes, qui en a déduit l'existence de la *droite polaire* d'un point par rapport à une courbe algébrique d'ordre m ; au moyen des formules

$$x = x_0 + \alpha\rho, \quad y = y_0 + \beta\rho,$$

on obtient l'équation de cette droite sous la forme

$$(X - x)f'_{x_0} + \dots + mf(x_0, y_0) = 0,$$

et l'on écrit ensuite

$$Xf'_{x_0} + \dots + Zf'_{z_0} = 0.$$

Maclaurin appelle *moyenne harmonique* des quantités $\rho_1, \dots, \rho_m$ la quantité ρ définie par l'égalité ci-dessus; Poncelet (*Journal de Crelle*, t. 3) appelle *centre des moyennes harmoniques* le point que nous avons appelé *conjugué harmonique*.

2° La considération de la première polaire, comme courbe donnant les points de contact des tangentes

issues d'un point, est certainement très ancienne; Boillier, en restant à ce point de vue, a considéré les polaires successives, la $(m-1)^{\text{ième}}$ polaire se trouvant être la droite polaire de Cotes (*Annales de Gergonne*, 1828-1829, p. 302).

3° Grassmann, reprenant l'idée de Cotes, l'a généralisée en écrivant

$$(p) \quad \sum \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) \dots \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{m-p}} \right) = 0$$

et aussi (voir plus loin)

$$((p)) \quad \sum \frac{P'P_1}{PP_1} \times \dots \times \frac{P'P_{m-p}}{PP_{m-p}} = 0$$

(*Journal de Crelle*, t. 24, 1842, p. 262). Il donne l'équation de la $p^{\text{ième}}$ polaire en prenant le point P comme origine des coordonnées.

4° Salmon (*Courbes planes*, 1852) a formé d'une manière simple l'équation de la $p^{\text{ième}}$ polaire au moyen des formules

$$x = x_0 + \lambda X, \quad \dots, \quad z = z_0 + \lambda Z,$$

en partant de la relation $((p))$.

5° De Jonquières (*Journal de Liouville*, 1857) a considéré les choses au point de vue géométrique.

6° F. Lucas (*Études analytiques sur la théorie générale des courbes planes*, 1864, Gauthier-Villars éditeur) a très heureusement présenté la relation

$$(1) \quad \sum \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) \dots \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{m-1}} \right) = 0,$$

qui définit les conjugués d'ordre 1 d'un point P, comme relative aux maximums et aux minimums

du produit

$$\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_m}\right),$$

ou encore du produit

$$\frac{P'P_1 \times \dots \times P'P_m}{P'^m}.$$

Entre autres avantages, cette façon de faire montre immédiatement que les conjugués d'ordre q du point P , par rapport aux conjugués d'ordre p , sont les conjugués d'ordre $p + q$ de ce point par rapport aux points primitifs.

Malheureusement, entraîné sans doute par la forme de la seconde des expressions ci-dessus, au lieu de désigner le produit des binômes $\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_i}\right)$ par $F\left(\frac{1}{\rho}\right)$ et d'écrire pour les polaires successives

$$F'\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0, \quad F''\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0, \quad \dots,$$

il écrit

$$\Phi(\rho) = \frac{(\rho - \rho_1) \cdot \dots \cdot (\rho - \rho_m)}{\rho^m},$$

ce qui complique les choses; il obtient l'équation de la première polaire sous la forme

$$(X - x_0)f'_X + (Y - y_0)f'_Y + mf(X, Y) = 0.$$

7° En écrivant $F'\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$, et en employant les formules $x = x_0 + \alpha\rho, \dots$, j'ai obtenu du premier coup; comme Salmon d'ailleurs, l'équation de la première polaire sous sa forme définitive

$$x_0 f'_X + \dots + z_0 f'_Z = 0;$$

la $p^{\text{ième}}$ polaire correspond à $F_{\left(\frac{1}{\rho}\right)}^{(p)} = 0$, forme condensée de l'équation (p) .

Cette méthode, qui utilise directement la relation (p) , me semble préférable à la méthode de Salmon, où l'on se sert d'une relation $((p))$ déduite de la relation primitive; elle explique bien la présence des dérivées dans l'équation de la polaire, l'équation $F_{\left(\frac{1}{\rho}\right)}^{(p)}$ étant amenée par une question de maximum. (Voir toutefois une observation à la fin du n° 6.)

I.

1. *a.* Soient donnés sur une droite des points $P_1, P_2, \dots, P_m$, en nombre m , et un point P . En désignant par ρ l'abscisse d'un point de la droite, comptée à partir de P , considérons l'équation

$$(0) \quad F\left(\frac{1}{\rho}\right) = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_2}\right) \dots \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_m}\right) = 0.$$

qui a pour racines les inverses des abscisses des points P_i en prenant pour inconnue $\frac{1}{\rho}$. Si ρ représente maintenant l'abscisse d'un point P' pris sur la droite, considérons la fonction $F\left(\frac{1}{\rho}\right)$, ou encore la fonction

$$\frac{P'P_1 \times P'P_2 \times \dots \times P'P_m}{P'^m},$$

qui n'en diffère que par un facteur constant; les valeurs de ρ qui correspondent aux maximums et aux minimums de cette fonction sont données par l'équation

$$(1) \quad F'_{\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \sum \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_2}\right) \dots \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{m-1}}\right) = 0;$$

on obtient ainsi des points P' , en nombre $m - 1$, qui sont dits les conjugués d'ordre 1 du point P par rapport aux m points donnés. Cette expression est due à F. Lucas.

b. Si l'on prend les conjugués d'ordre 1 du point P par rapport aux $m - 1$ points P' , on obtient $m - 2$ points P'' dont les abscisses ρ vérifient l'équation

$$({\textcolor{black}{2}}) \quad F_{\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \sum \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_2} \right) \cdots \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{m-2}} \right) = 0;$$

ces points P'' sont dits les conjugués d'ordre 2 du point P par rapport aux m points donnés.

c. On continue ainsi, et les conjugués d'ordre p du point P correspondent à l'équation

$$({\textcolor{black}{p}}) \quad F_{\left(\frac{1}{\rho}\right)}^{(p)} = \sum \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) \cdots \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{m-p}} \right) = 0,$$

qui est du degré $m - p$.

d. On arrive finalement à l'équation

$$({\textcolor{black}{m}} - 1) \quad F_{\left(\frac{1}{\rho}\right)}^{(m-1)} = \sum \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) = 0,$$

qui donne le conjugué d'ordre $m - 1$, le conjugué harmonique.

2. En remplaçant $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}$ par $\frac{\rho_1 - \rho}{\rho \rho_1}$, l'équation (p) peut s'écrire, avec un seul accent au lieu des p accents qui seraient nécessaires,

$$({\textcolor{black}{p}}) \quad \sum \frac{P P_1}{P P_1} \times \frac{P' P_2}{P P_2} \times \cdots \times \frac{P' P_{m-p}}{P P_{m-p}} = 0;$$

on en déduit, en multipliant par $\frac{PP_1}{P'P_1} \times \dots \times \frac{PP_m}{P'P_m}$,

$$\sum \frac{PP_1}{P'P_1} \times \dots \times \frac{PP_p}{P'P_p} = 0;$$

de sorte que, si le point P' est conjugué d'ordre p du point P par rapport aux points donnés, le point P est conjugué d'ordre $m - p$ du point P' par rapport à ces mêmes points. Les $m - p$ points qui sont les conjugués d'ordre p du point P sont les points dont le point P est un conjugué d'ordre $m - p$; en particulier, les $m - 1$ points qui sont les conjugués d'ordre 1 du point P sont les points dont le conjugué harmonique est le point P .

On pouvait d'ailleurs mettre la relation (p) sous la forme

$$\sum \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho - \rho_1} \right) \dots \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho - \rho_p} \right) = 0.$$

sans écrire expressément la relation $((p))$.

3. Si le point P est à l'infini, on considère sur la droite les points P' dont la puissance

$$P'P_1 \times P'P_2 \times \dots \times P'P_m$$

est maximum ou minimum; ces points sont dits *les points centraux d'ordre 1* du système donné. Cette expression est due à F. Lucas. En désignant par ρ l'abscisse d'un point de la droite, *comptée à partir d'une origine quelconque* O , si les abscisses des points donnés sont les racines de l'équation

$$[0] \quad \varphi(\rho) \equiv (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) \dots (\rho - \rho_m) = 0,$$

les abscisses des points centraux d'ordre 1 sont don-

nées par l'équation

$$[1] \quad \varphi'(\rho) \equiv \Sigma(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) \dots (\rho - \rho_{m-1}) = 0.$$

Il existe un point central d'ordre 1, et un seul, entre deux points donnés consécutifs quelconques.

On obtient ensuite les points centraux d'ordre 2 avec l'équation

$$[2] \quad \varphi''(\rho) \equiv \Sigma(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) \dots (\rho - \rho_{m-2}) = 0.$$

On arrive enfin au point central d'ordre $m - 1$, ou *centre des moyennes distances*, avec l'équation

$$[m - 1] \quad \varphi^{(m-1)}(\rho) \equiv \Sigma(\rho - \rho_1) = 0.$$

4. Si le point P' est point central d'ordre p , l'un des *conjugués d'ordre $m - p$* du point P' est à l'infini. Les $m - p$ points centraux d'ordre p sont les points dont un conjugué d'ordre $m - p$ est à l'infini; les $m - 1$ points centraux d'ordre 1 sont les points dont le conjugué harmonique est à l'infini.

Nous ne reparlerons pas de ce cas particulier.

II.

5. Considérons une courbe algébrique d'ordre m , dont l'équation en coordonnées cartésiennes, rendue homogène, est

$$f(x, y, z) = 0.$$

Soient P et P' deux points dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0 et X, Y, Z ; la droite PP' rencontre la courbe en m points P_i ; si l'on pose

$$\frac{P'P_i}{PP_i} = -\frac{\lambda_i}{\mu_i},$$

on a pour les coordonnées du point P_i

$$x_i = \lambda_i x_0 + \mu_i X, \quad \dots, \quad \dots$$

Les valeurs des m rapports $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ sont données par l'équation

$$f(\lambda x_0 + \mu X, \dots, \dots) = 0,$$

qui devient

$$\begin{aligned} \lambda^m f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\lambda^{m-1} \mu}{1} (X f'_{x_0} + \dots + \dots) + \dots \\ + \frac{\mu^m}{m!} (X f'_{x_0} + \dots + \dots)^{(m)} = 0, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mu^m f(X, Y, Z) + \frac{\mu^{m-1} \lambda}{1} (x_0 f'_X + \dots + \dots) + \dots \\ + \frac{\lambda^m}{m!} (x_0 f'_X + \dots + \dots)^{(m)} = 0. \end{aligned}$$

Dès lors, *en se reportant à la relation* $((p))$, le point P' sera conjugué d'ordre p du point P (ou encore le point P sera conjugué d'ordre $m - p$ du point P') si l'on a

$$(X f'_{x_0} + \dots + \dots)^{(m-p)} = 0,$$

ou encore

$$(x_0 f'_X + \dots + \dots)^{(p)} = 0.$$

Le point P étant maintenant donné, l'équation de la $p^{\text{ième}}$ polaire sera l'une ou l'autre des équations précédentes, X, Y, Z étant des coordonnées courantes; on prendra, pour la première polaire,

$$x_0 f'_X + \dots + \dots = 0,$$

et, pour la droite polaire,

$$X f'_{x_0} + \dots + \dots = 0.$$

6. La méthode précédente est celle de Salmon; voici celle dont j'ai parlé au début de cette Note.

Le point P étant donné, si l'on mène par ce point une sécante, les coordonnées d'un point de cette droite sont données par les formules

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha\rho, & y &= y_0 + \beta\rho, & z &= z_0 = 1, \\ \text{ou} & & & & & \\ \frac{x}{\rho} &= \frac{x_0}{\rho} + \alpha, & \frac{y}{\rho} &= \frac{y_0}{\rho} + \beta, & \frac{z}{\rho} &= \frac{z_0}{\rho} = \frac{1}{\rho}, \end{aligned}$$

et les valeurs de $\frac{1}{\rho}$ relatives aux points d'intersection avec la courbe sont données par l'équation

$$F\left(\frac{1}{\rho}\right) \equiv f\left(\frac{x_0}{\rho} + \alpha, \frac{y_0}{\rho} + \beta, \frac{z_0}{\rho}\right) = 0.$$

Les valeurs de $\frac{1}{\rho}$ relatives aux points de la première polaire sont données par l'équation

$$F'_{\left(\frac{1}{\rho}\right)} \equiv x_0 f'_x\left(\frac{x_0}{\rho} + \alpha, \dots\right) + \dots + z_0 f'_z\left(\frac{x_0}{\rho} + \alpha, \dots\right) = 0;$$

en remplaçant $x_0 + \alpha\rho, \dots$ par X, Y, Z, on a l'équation de la première polaire sous la forme

$$x_0 f'_X + y_0 f'_Y + z_0 f'_Z = 0.$$

L'équation de la $p^{\text{ième}}$ polaire est

$$(x_0 f'_X + y_0 f'_Y + z_0 f'_Z)^{(p)} = 0.$$

Sur un point, cette méthode est inférieure à la précédente. La condition pour le point P' d'être conjugué d'ordre p du point P ne diffère pas de la condition pour le point P d'être conjugué d'ordre $m - p$ du point P', et ce fait est intuitif quand on écrit l'équation (p) sous la forme $((p))$ du n° 2; ce même fait se

présente donc de lui-même dans le calcul du n° 5, et l'on obtient en conséquence l'équation de la $p^{\text{ième}}$ polaire sous deux formes différentes. La méthode actuelle donne une seule forme, celle qui est écrite ci-dessus; l'autre forme résulte alors seulement d'un fait analytique.

7. Félix Lucas, au lieu de

$$F\left(\frac{1}{\rho}\right) = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_m}\right),$$

écrit

$$\Phi(\rho) = \frac{(\rho - \rho_1) \cdots (\rho - \rho_m)}{\rho^m} = \frac{\varphi(\rho)}{\rho^m};$$

les conjugués d'ordre 1 du point P correspondent alors à l'équation

$$\Phi'(\rho) = 0,$$

ou

$$\rho \times \varphi'(\rho) = m\varphi(\rho),$$

qui est en apparence de degré m , en réalité de degré $m - 1$; on peut interpréter géométriquement cette équation (après l'avoir divisée par m) en introduisant les points centraux d'ordre 1 donnés par l'équation

$$\varphi'(\rho) = 0$$

avec une origine quelconque des coordonnées (¹).

L'auteur observe d'ailleurs qu'on peut écrire, en considérant la dérivée logarithmique de $\Phi(\rho)$,

$$\frac{1}{\rho - \rho_1} + \frac{1}{\rho - \rho_2} + \cdots = \frac{m}{\rho},$$

de sorte que l'un quelconque des points P' a pour

(¹) Cette interprétation est bien connue dans le cas de la division harmonique; on a alors $P'P \times P'O = P'P_1 \times P'P_2$, le point O étant le milieu du segment P_1P_2 .

conjugué harmonique le point P (comparer la fin du n° 2).

Relativement à la première polaire d'un point P par rapport à une courbe algébrique d'ordre m , une sécante menée par le point P ayant pour équation

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0),$$

l'équation aux x des points d'intersection avec la courbe est

$$f(x, y) = 0,$$

y représentant ici la fonction de x définie par l'équation ci-dessus, et l'on a pour les points conjugués d'ordre 1 (la définition des points conjugués étant projective cylindriquement)

$$(X - x_0)[f'_X + \lambda f'_Y] = mf(X, Y)$$

ou

$$(X - x_0)f'_X + (Y - y_0)f'_Y = mf(X, Y);$$

cette équation est du degré m en apparence, du degré $m - 1$ en réalité.

F. Lucas laisse l'équation de la première polaire sous cette forme, ce qui amène des complications pour les polaires successives; on doit écrire

$$x_0 f'_X + y_0 f'_Y + z_0 f'_Z = 0, \dots$$

[Avec la fonction φ , les conjugués d'ordre 2 du point P correspondent à l'équation

$$\rho^2 \varphi''(\rho) - 2(m-1)\rho \varphi'(\rho) + m(m-1)\varphi(\rho) = 0,$$

qui est en apparence du degré m , en réalité du degré $m - 2$; après division par $m(m-1)$, cette équation peut s'interpréter au moyen des points centraux d'ordres 1 et 2. Et ainsi de suite. Cette écriture masque entièrement le fait que, si P' est conjugué

d'ordre p de P , P est conjugué d'ordre $m - p$ de P' . Elle conduit pour la polaire à une écriture

$$(X - x_0)f'_X + \dots = mf(X, Y),$$

que n'intéresse pas le fait analytique dont il est question à la fin du n° 6.]

8. On peut, à la manière de Cotes, définir *a priori* le conjugué d'ordre $m - 1$ ou conjugué harmonique P' d'un point P par la relation

$$\frac{m}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} + \dots$$

Au moyen des formules

$$x = x_0 + \alpha\rho, \quad y = y_0 + \beta\rho,$$

on obtient alors l'équation de la droite polaire d'un point P sous la forme

$$(X - x_0)f'_{x_0} + (Y - y_0)f'_{y_0} + mf(x_0, y_0) = 0,$$

et l'on peut écrire

$$Xf'_{x_0} + Yf'_{y_0} + Zf'_{z_0} = 0.$$

Cette relation a lieu entre les coordonnées de deux points $P(x_0, y_0, z_0)$ et $P'(X, Y, Z)$ tels que le second est conjugué harmonique du premier. Pour en déduire l'équation de la première polaire, lieu d'un point P' qui est conjugué d'ordre 1 du point P , il faut savoir que le point P est alors le conjugué harmonique du point P' , ce qui donne la condition

$$x_0f'_X + y_0f'_Y + z_0f'_Z = 0.$$

On en déduit les équations des polaires successives.

Mais, plus encore que dans la méthode de Salmon, on fait ici abstraction de l'idée de maximum qui est essentielle dans la question.